INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

GEOMETRÍA: Es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de propiedades de puntos, rectas. polígonos, etc.Proviene del Griego GEO (tierra) METROS (medida). Podemos clasificar la Geometría den dos clases:

- **GEOMETRÍA PLANA**: Estudia las porpiedades de elementos con una o dos dimensiones. Es decir, solo se ocupa de todo lo que puede pude suceder en un plano.
- **GEOMETRÍA ESPACIAL**: También se llama geometría descriptiva y estudia las figuras y todo lo que puede suceder en las tres dimensiones. Fundamentalmente se ocupa de la representación de objetos o figuras tridimensionales sobre un plano (el papel) que tiene únicamente dos dimensiones.

PUNTO, RECTA, SEMIRECTA Y SEGMENTO

PUNTO: Geométricamente podemos definir un punto de tres formas:
- Interseccion de dos rectas o arcos.
- Intersección de una recta con un plano.
- Circunferencia de radio 0.

RECTA: Una recta es una suceción de puntos en una misma dirección. Según esta definición una recta es infinita y solo la podemos concebir virtualmente y no realmente, ya que todos los soportes (papeles, lienzos, la pizarra de clase) son finitos. Una recta puede ser definida geométricamente por dos planos que se cortan (geometría descriptiva) o por dos puntos (geometría plana).

SEMIRECTA: Una semirecta es una porción de recta delimitada por un punto

SEGMENTO: Un segmento es una porción de recta delimitada por dos puntos. Por tanto un segmento tiene un principio y un fin y es finito y se puede medir. Realmente todas las rectas que dibujamos son segmentos, pues empiezan y acaban en algun sitio. Por eso para dibujar un segmento se suelen marcar claramente lso puntos de principio y fin.

RELACIONES ENTRE RECTAS O SEGMENTOS

Dos rectas o segmentos pueden guardar tres tipos diferentes de relaciones:

- **PARALELAS**: Todos los puntos de las dos rectas están siempre a la misma distancia. Es decir, dos rectas paralelas nunca se cortan.
- **PERPENDICULARES**: Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando cuatro ángulos rectos. Este concepto esta relacionado con un adjetivo importante, **ortogonal**, decimos que dos rectas son son ortogonales cuando formán ángulos de 90º,son rectos o perpendiculares.
- **OBLICUAS**: dos rectas oblicuas se cortan sin formar ángulos rectas

TRES PUNTOS determinan en el plano una circunferencia. Dados tres puntos siempre podremos trazar una circunferencia. En términos tridimensionales tres puntos definen un plano. Una silla con tres patas nunca estará coja.

LA CIRCUNFERENCIA

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado centro. Es una curva cerrada y plana cuyos puntos **EQUIDISTAN** (están a la misma distancia) del centro. Llamamos **RADIO** a la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos d ela circunferencia.

CIRCULO: Es la porción de plano comprendida dentro de la circunferencia

RELACIONES CIRCUNFERENCIA - CIRCUNFERENCIA / CIRCUNFERENCIA - RECTA

SECANTES: Se cortan. Cuando dos circunferencias o una recta y una circunferencia se cortan producen dos puntos de intersección. Para una circunferencia y un segmento secantes encontramos:

- **Cuerda**: Es la porción de recta que queda dentro de la circunferencia siempre y cuando no pase por el centro.
- **Diámetro**: Es un segmento que corta a la circunferencia en dos puntos pasando por el centro.
- **Arco**: Es la porción de circunferencia que queda entre los dos puntos de intersección con otra circunferencia o recta.
- **Flecha**: se llama así al radio perpendicular a una cuerda de circunferencia.

TANGENTES: Una recta y una circunferencia son tangentes cuando se tocan pero no se cortan. En esos caso ambos elementos comparten en común un punto llamado punto de tangencia.

EXTERIORES: Se llama así a dos circunferencias o una circunferencia y una recta que no se tocan ni se cortan.

INTERIORES: Se llaman circunferencia "interior a otra" cuando está dentro de otra mayor y ni se tocan ni se cortan.

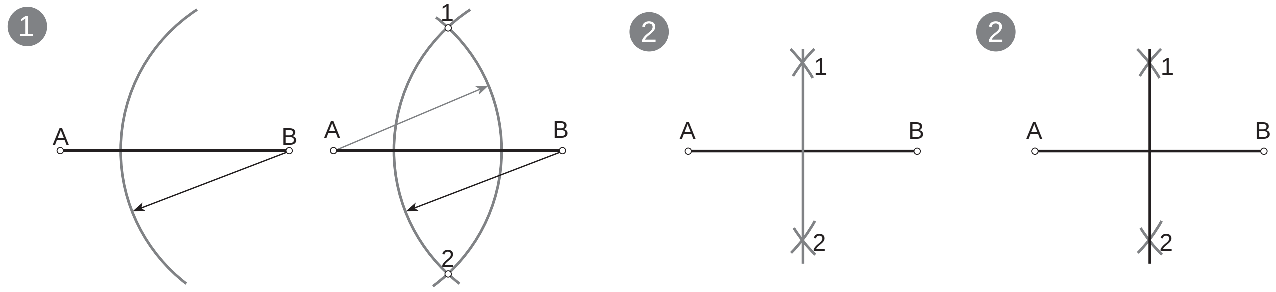
CONCENTRICAS: Se llaman así las circunferencias que comparten el mismo centro.

Mediatriz de un segmento:

Dado un segmento AB, hallar la mediatriz.

La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a este por su punto medio. Procedimiento:

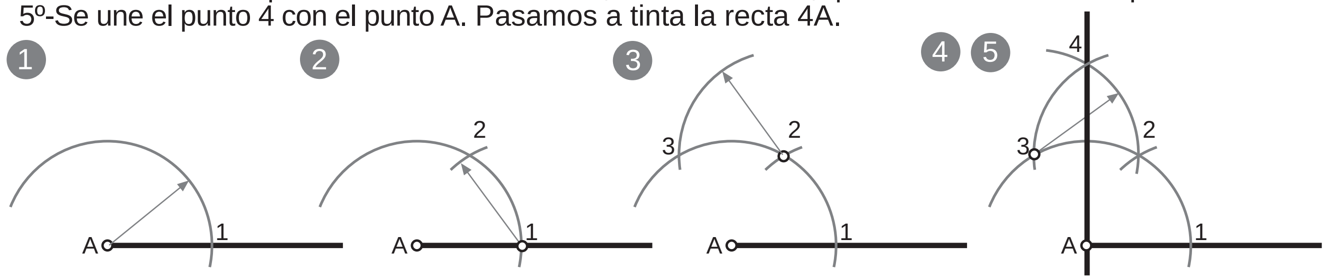
1º- Se trazan dos arcos de igual rádio con centro en ambos extremos A y B. Se obtienen así los puntos 1 y 2 donde ambos arcos se cortan.
2º- Se unen los puntos 1 y 2 para obtener la mediatriz.
3º- Se pasa el resultado a tinta.



Perpendicular a un segmento o semirecta por un extremo:

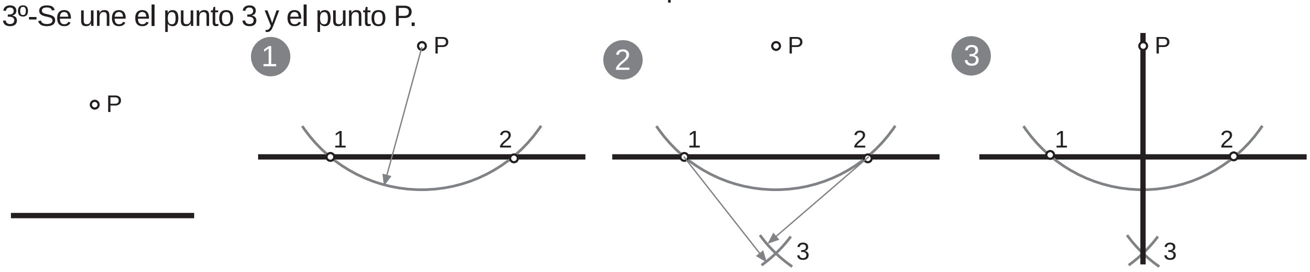
Dado un segmento AB, trazar la perpendicular por el punto A.

1º-Con centro en A se traza un arco (casi una semicircunferencia) que corta al segmento en el punto 1.
2º-Con centro en el punto 1 se traza otro arco con el mismo radio que corta al anterior arco en el punto 2.
3º-Con centro en el punto 2 y mismo radio se traza otro arco que corta al primero en el punto 3.
4º-Con centro en el punto 3 trazamos otro arco, de mismo radio, que corta al último en el punto 4.
5º-Se une el punto 4 con el punto A. Pasamos a tinta la recta 4A.



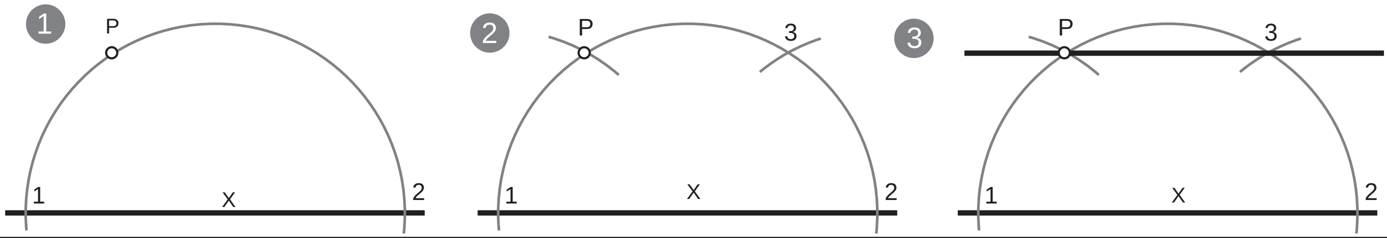
Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella:

1º-Con centro en P se traza un arco de circunferencia que corte a la recta en dos puntos: 1 y 2.
2º-Con centro en los puntos 1 y 2, se trazan dos arcos de radio mayor a la mitad de la distancia entre ellos.Donde ambos arcos se cortan obtenemos el punto 3.
3º-Se une el punto 3 y el punto P.



Paralela a una recta por un punto exterior:

1º- Se elige un punto X centrado en la recta como centro y se traza una semicircunfenerncia de radio XP que la corta en dos puntos: 1 y 2.
2º- Con centro en el punto 1 se toma el radio 1P y desde el punto 2 se traza un arco que corta al primero en el punto 3.
3º- Se une el punto 3 con P.

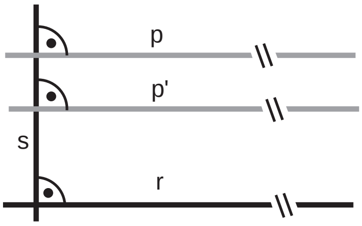


Paralela a una recta a una distancia dada (d) :

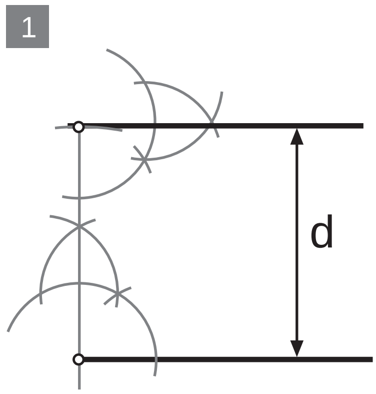
d

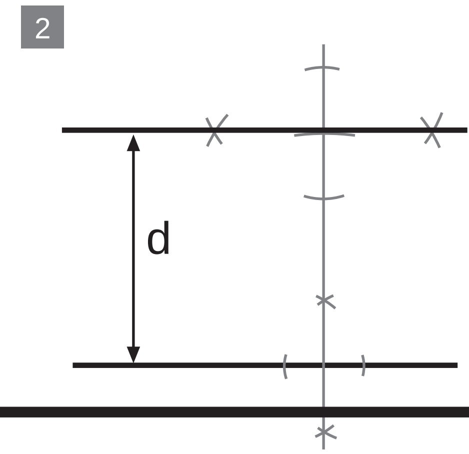
La distancia entre una recta y otra es la medida que se toma sobre una recta perpendicular a ambas.

Si tenemos una recta (r), y una recta prependicular (s), cualquier recta perpendicular (p) a (s) será paralela a (r).



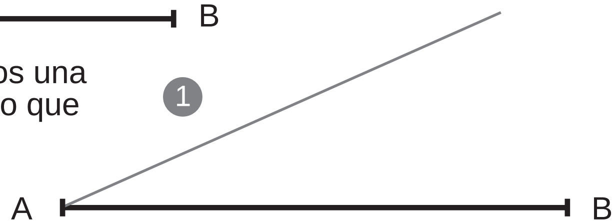
Por lo tanto podemos emplear cualquiera de los metodos de "perpendicularidad" para resolver este problema. A la derecha te mostramos dos de ellos.

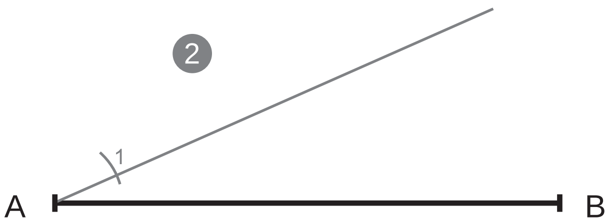




DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n (7) partes iguales:
El procedimiento es el mismo aunque varie el númenro de partes en las que queramos dividir el segmento.

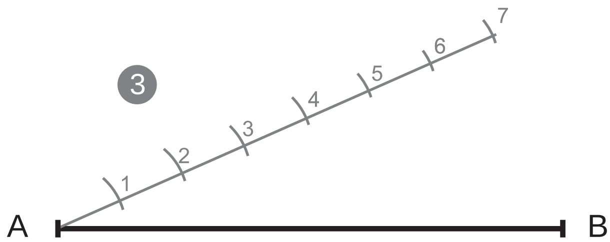
1º- Desde un extremodel segmento dado trazamos una recta auxiliar. No importa la abertura del ángulo que esta forme con el segmento dado.

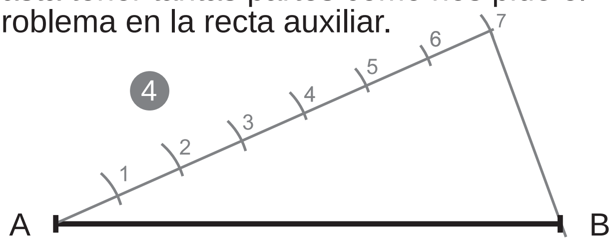




2º- Tomamos un radio de compás (no importa la abertura del compás, solo que quepa tantas veces como divisiones nos pide el problema sobre la recta auxiliar) y con centro en el vértice del ángulo trazamos una marca sobre la recta auxiliar.

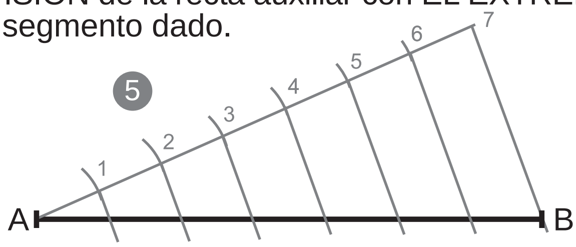
3º- Con centro en esa primera marca, y con el mismo radio de compás repetimos la operacion hasta tener tantas partes como nos pide el problema en la recta auxiliar.

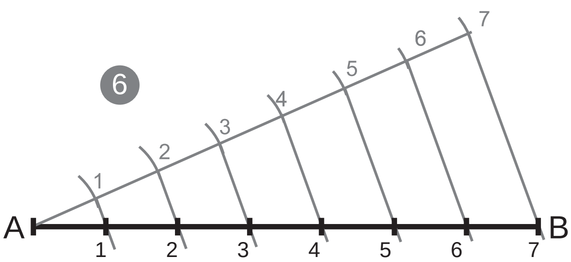




4º- Trazamos un segmento que une la ÚLTIMA DIVISIÓN de la recta auxiliar con EL EXTREMO B del segmento dado.

5º- Trazamos paralelas a la última recta pasada. estas pasan por las divisiones que hemos trazado sobre la racta auxiliar y cortan al segmento dado den el enunciado del problema.

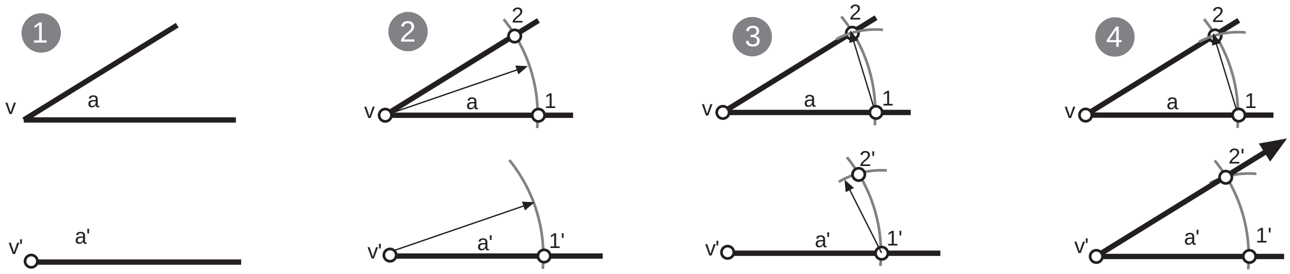




6º- Los puntos de corte de las paralelas con el segmento dado son la solución, las divisiones del segmento en el nº de partes que pedía el enunciado.

COPIA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dado un ángulo (a) trazar otro ángulo (a') igual.

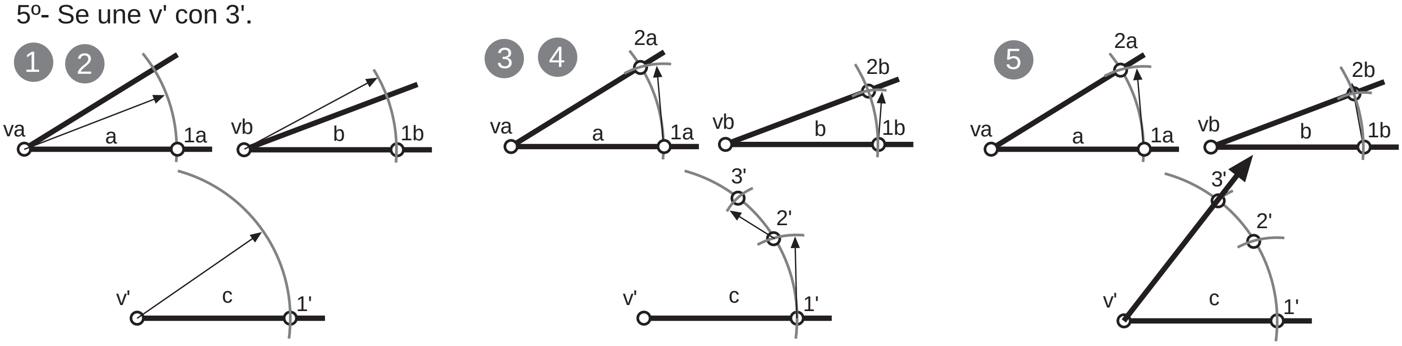
1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo copiado.
2º- Con centro en el punto v se traza un arco de radio cualquiera que corta los lados de este en los puntos 1 y 2. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1 del ángulo dado, se mide con el compas la distancia desde 1 hasta 2. En el nuevo ángulo copiado con centro en 1' se traza un arco que corte al anterior obteniendo 2'
4º- Se une v' con 2'.



SUMA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dados los ángulos (a) y (b) trazar otro ángulo (c) = (a+b)

Se trata de copiar un ángulo encima del otro, compartiendo ambos un lado que finalmente no será parte del resultado.

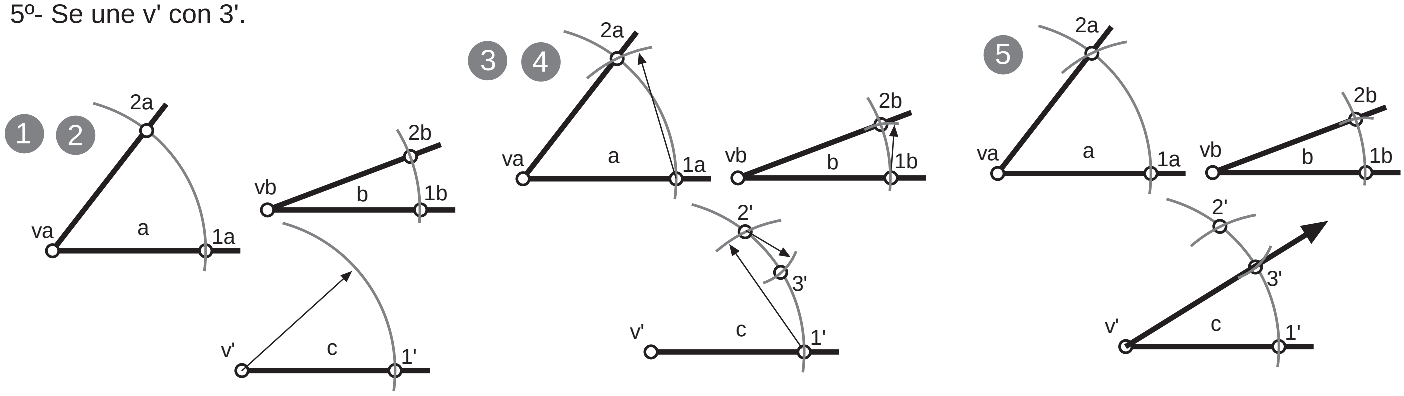
1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo resultado a+b.
2º- Con centros en los puntos (va) y (vb), se traza un arco de radio cualquiera pero igual, que corta ambos lados de los ángulos en los ptos 2a y ab. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1a, se mide con el compás la distancia desde 1a-2a, colocándola en el resultado desde 1', obteniendo así el pto. 2'.
4º- Se mide, con compás, la distancia 1b-2b.Desde 2' trazamos un arco de radio 1b-2b para obtener 3'.
5º- Se une v' con 3'.



RESTA DE ÁNGULOS CON COMPÁS Y REGLA: dados los ángulos (a) y (b) trazar otro ángulo (c) = (a-b)

Se trata de copiar el ángulo menor dento del mayor, compartiendo ambos un lado que finalmente no será parte del resultado.

1º- Se traza un segmento o semirecta y se indica v' que será el vertice del nuevo ángulo resultado a-b.
2º- Con centros en los puntos (va) y (vb), se traza un arco de radio cualquiera pero igual, que corta ambos lados de los ángulos en los ptos. Con centro en v' se traza un arco de igual rádio que cortará al lado ya dibujado en el punto 1'.
3º- Desde el punto 1a, se mide con el compás la distancia desde 1a-2a, colocándola en el resultado desde 1', obteniendo así el pto. 2'.
4º- Se mide, con compás, la distancia 1b-2b.Desde 2' trazamos un arco, situado entre 1' y 2', de radio 1b-2b para obtener 3'.
5º- Se une v' con 3'.



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO:

Es la semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales pasando por el vértice.
Todos los puntos de la bisectriz equidistan (están a la misma distancia)de los lados del ángulo.

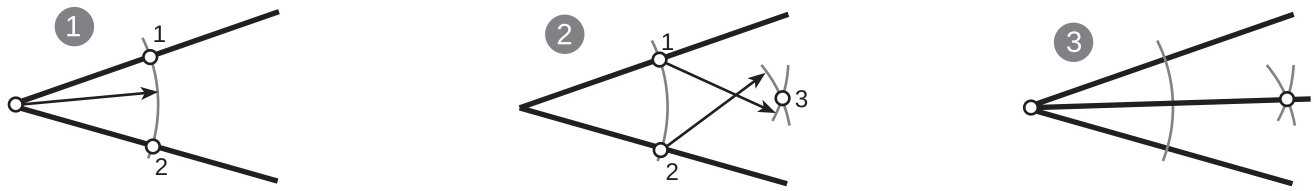
La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo.

TRAZADO DE LA BISECTRIZ: Dado un angulo a, trazar su bisectriz.

1º- Con centro en el vértice y un radio cualquiera (suficientemente amplio) se traza un arco que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2.

2º- Con centros en los puntos 1 y dos se trazan dos arcos de igual radio (mayor a la mitad de la distancia entre 1 y 2) que se cortán en el punto 3.

3º- Se une el punto 3 con el vértice del ángulo dado.



TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DEL QUE SE DESCONOCE EL VÉRTICE:

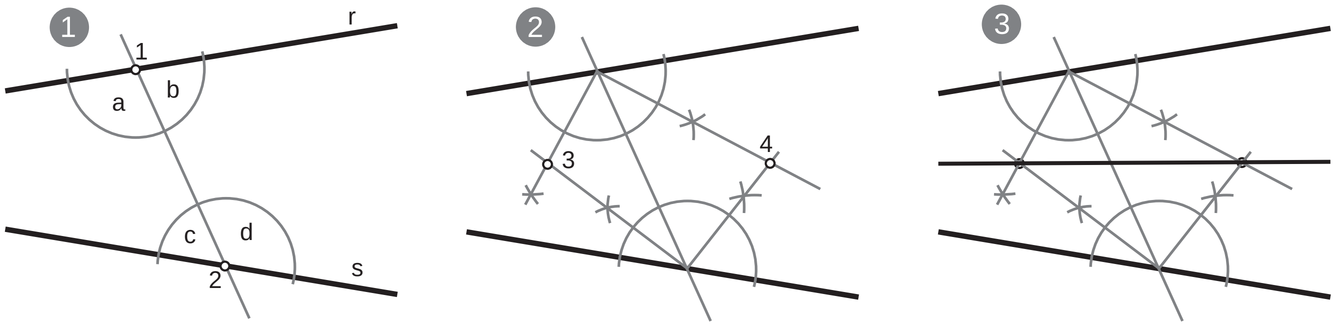
Dadas dos rectas, no paralelas: r y s, trazar su bisectriz.
Existen dos métodos para resolver este problema.

METODO 1: Recta que corta a ambos lados del ángulo.

1º- Se traza una recta que corta a ambos lados del ángulo en los puntos 1 y 2. De este modo, 1 y 2 se convierten en vértices de 4 ángulos: a b, c y d

2º- Se trazan las bisectrices de los angulos a, b, c y d. Las bisectrices se cortan en dos puntos: 3 y 4

3º- Se une el punto 3 con el 4.



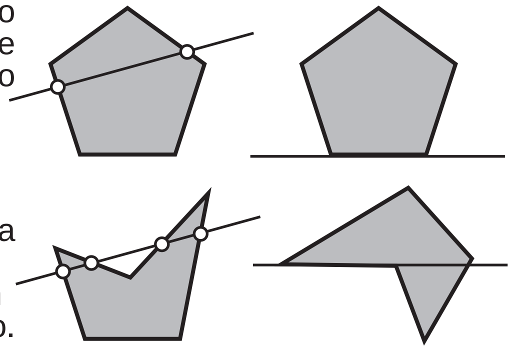
LOS POLIGONOS

Un **polígono** es la porción de plano encerrada por varios segmentos llamados lados. El término "polígono" procede del griego antiguo y significa "muchos" (poli) ángulos (gono).

CLASIFICACIÓNES

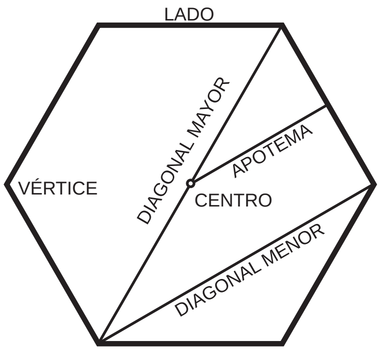
Polígono **convexo**: Es aquel polígono que al ser atravesado por una recta únicamente tiene o puede tener un punto de la recta de entrada y otro de salida. Si al apollarse en uno de sus lados sobre una recta el polígono queda en su totalidad a un lado de esta.

Polígono **concavo**: Es aquel que al ser atravesado por una recta tiene mas de un punto de entrada y salida en la trayectoria de la recta. También es convexo cuando es posible apoyar el poligóno sobre alguno de sus lados en una recta quedándo parte a un lado de esta y parte al otro.



Equiángulo: Un polígono es equiángulo cuando tiene todos sus ángulos iguales.
Equilátero: Un polígono es equilátero cuando todos sus lados soon iguales.
Regular: Un polígono es regular cuando todos sus lados y ángulos son iguales.
Irregular: Es el polígono que tiene lados y ángulos desiguales

PARTES DE UN POLÍGONO



LADO: Cada uno de los segmentos que componen el polígono.

VÉRTICE:Es el punto en el que se unen dos lados consecutivos.

DIAGONAL: Segmento que une dos vértices no consecutivos. Algunos polígonos tienen diagonal mayor y diagonal menor.

PERÍMETRO: Es la suma de todos los lados.

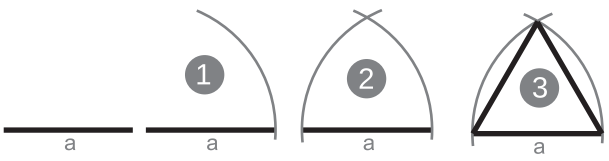
En un polígono regular además encontramos:

CENTRO: Es el punto equidistante de todos los vértices y lados. En el se encuentra el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita.

APOTEMA: Es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de los lados perpendicularmente.

Dado el lado a, construcción de polígonos regulares:

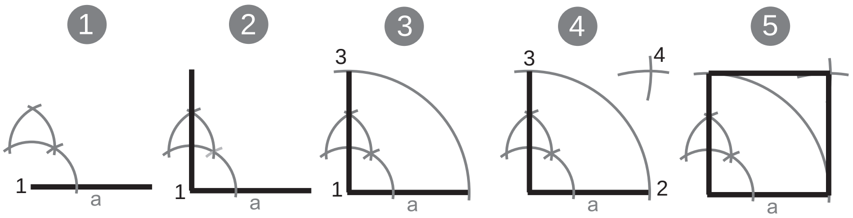
Triángulo equilátero



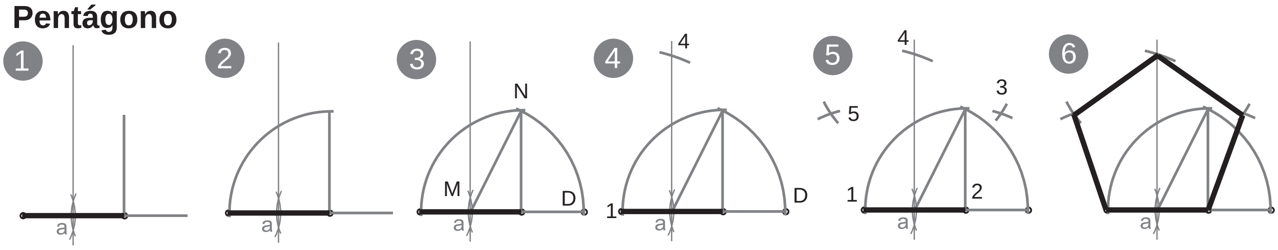
1º Desde un extremo del lado dado trazar un arco de igual radio al lado
2º Desde el otro extremo repetir la operación
3º El punto donde se curzan ambos arcos es el tercer vértice del triángulo. Unir este con los extremos dle segmento

Cuadrado

1º Con compás, en el vértice1, trazamos 4 arcos del mismo radio que definirán 4 puntos
2º Se une el punto 4 con el vértice 1
3º Con el compás: radio igual al lado y centro en el vértice 1 trazamos un arco que nos da el vértice 3
4º Con radio igual al lado dado trazamos dos arcos desde el vertice 3 y el 2 obteniendo el 4º vértice
5º Se unen los vértices 3 y 2 con 4

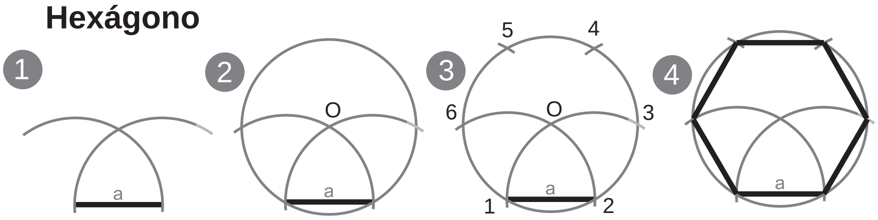


Pentágono



1º Se traza la mediatriz del lado. Por el extremo derecho: se levanta una perpendicular y se prolonga el lado
2º Desde el extremo derecho, con radio igual al lado trazamos un arco que corta a la perpendicular que hemos levantado antes
3º Con centro en el punto medio del lado dado y radio MN trazamos un arco que corta a la prolongacion del segmento en D
4º Con centro en el vértice 1, con radio 1D trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto 4
5º Con radio igual al lado dado trazamos arcos desde 1, 2 y 4 para obtener los vértices 3 y 5
6º Unimos los 5 vértices para obtener el pentágono

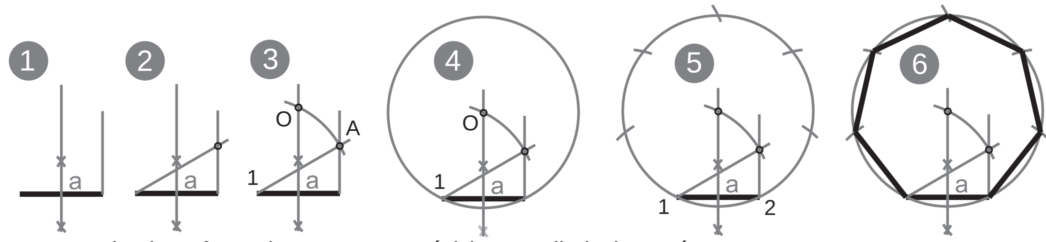
Hexágono



1º Con Radio igual al lado dado se trazan dos arcos para obtener O
2º Con centro en O y abriendo el compás hasta un extremo del lado dado trazamos una circunferencia
3º Desde 3 y 6 con radio igual al lado dado trazamos dos arcos que sobre la circunferencia nos darán los puntos 4 y 5
4º Unimos los 6 puntos

Heptágono

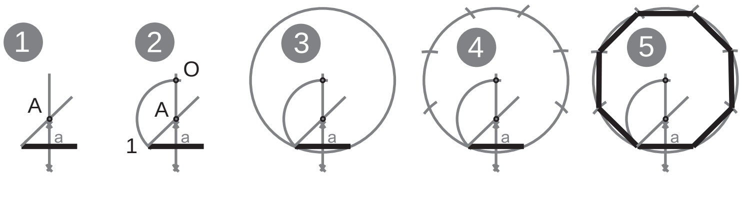
1º Trazamos la mediatriz de lado dado y por un extremo levantamos una perpendicular
2º por el otro extremo trazamos una recta a 30º
3º Desde el punto 1 con radio 1A trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto O



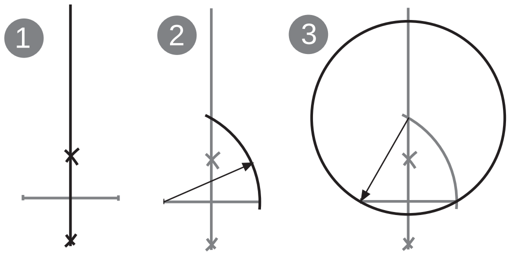
4º Con centro en O y radio O1 Trazamos la circunferencia que encerrará (circunscribe) al Heptágono
5º Tomamos el radio igual al lado dado y desde 1 y 2 trazamos arcos que nos daran los vértices 3,4,5,6 y 7
6º Unimos los 7 puntos

Octógono

1º Se traza la mediatriz del lado dado y desde un extremo trazamos una recta a 45º para obtener A
2º Con centro en A y radio A1 trazamos un arco que corta a la mediatriz en el punto O
3º Con centro en O y radio O1 trazamos una circunferencia
4º Tomando como radio el lado dado trazamos arcos sobre la circunferencia que nos darán los 6 vertices restantes
5º Unimos los 6 puntos con el segmento.

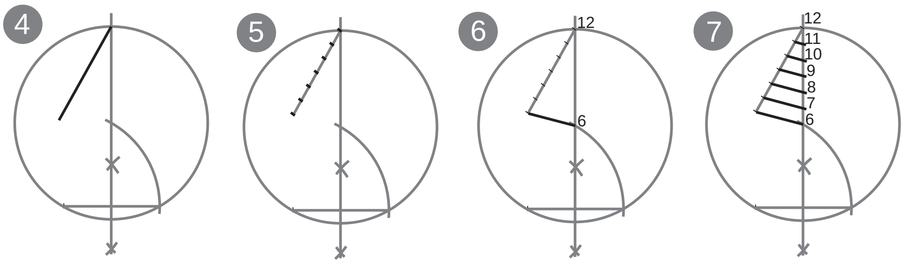


Construcción de un polígono regulares de n (9) lados dado su lado:



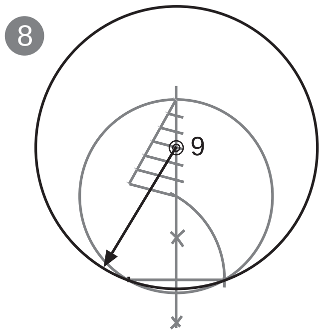
1º Trazamos la mediatriz del segmento
2º Desde un extremo del segmento y con radio igual a este. trazamos un arco que corta a la mediatriz
3º Desde el punto obtenido en la mediatriz con el arco hacemos centro de compás abriendolo hasta no de los extremos del segmento y trazamos una circunerencia que debe de pasar por ambos extremos del segmento

Nos aseguraremos de que la mediatriz corte a la circunferencia por la parte superior. De este modo la mediatriz ahora es un diámetro de la circunferencia. A continuación dividiremos el radio superior de este diámetro en seis partes iguales mediante Thales de Mileto.

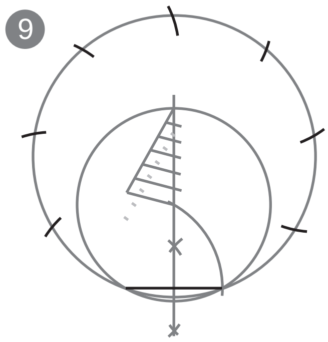


4º Trazamos un segmento auxiliar desde el extremo superior del diámetro
5º dividimos el segmento auxiliar en seis partes iguales (con compás)
6º Unimos el último extremo del seg. aux. con el centro de la circunferencia que será la parte nº 6, siendo el extremo superior del diámetro la parte nº 12
7º Trazamos paralelas por las marcas hechas sobre el segmento auxiliar obteniendo así las 6 divisiones buscadas.

En este caso buscamos un eneágono. Por ello haremos centro de compás en la división nº 9 Si buscaramos un polígono de nº distinto de lados hariamos centro en la división del radio de igual numero

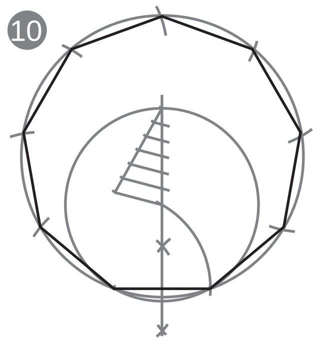


8º Hacemos centro en la división correspondiente con el numero de lados que buscamos. Abrimos el compás hasta uno de los extremos del segmento dado en el enunciado y trazamos una circunferencia. La circunferencia debe de pasar tambien por el otro extremo del segmento



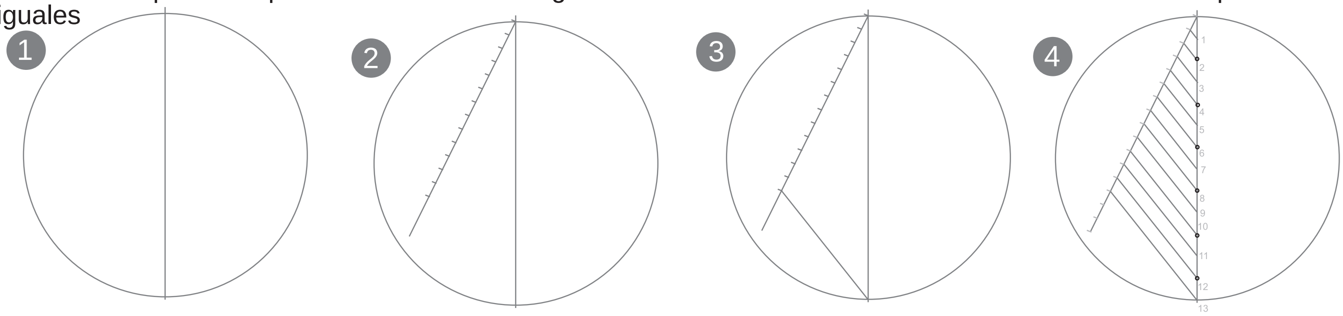
9º Con ayuda del compás repetimos la medida del segmento dado en el enunciado sobre la circunferencia.

10º Finalmente podemos trazar el poligono de nueve lados que pide el enunciado.

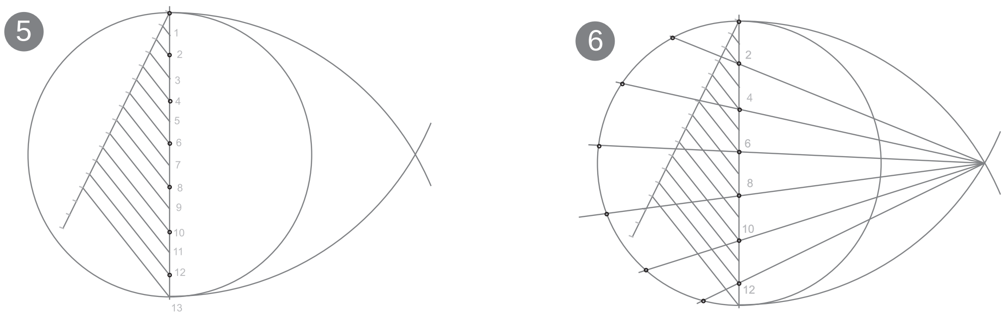


Dado el radio de circunferencia a: construir un polígono regular de n (13) lados: a

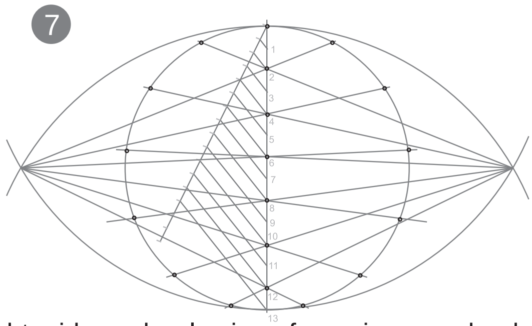
1º Trazamos una circunferencia con el radio que nos han indicado y trazamos un diámetro vertical
DIVIDIMOS EL DIAMETRO EN TANTAS PARTES COMOLADOS QUEREMOS QUE TENGA EL POLIGONO
2º Desde el extremo superior trazamos una semirecta auxiliar y la dividimos en tantas partes com queremos dividir el diámetro (podemos hacerlo con el compás o con la regla graduada)
3º unimos el último extremo con el extremo opuesto del diámetro
4º Trazamos paralelas por las divisiones del segmento auxiliar obteniendo la división del diámetro en n partes iguales



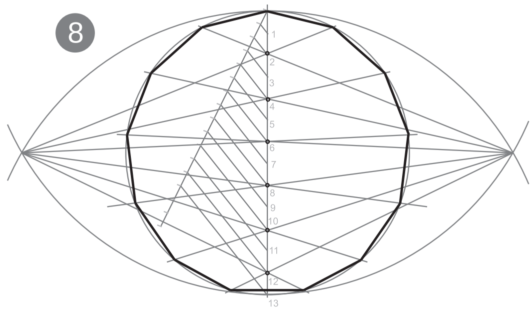
5º con radio igual al diámetro de la circunferencia y desde los extremos de este trazamos dos arcos que nos daran un foco
6º desde el foco trazamos rectas por las divisiones pares. en los extremos contrarias de la circunferencia obtendremos la mitad de los vertices de la solución. el punto 0 del diámetro tambien lo incluimos, aunque dada su situación no hemos necesitado trazar una recta puesto que este ya se encuentra sobre la circunferencia



7º Repetimos la última operacion desde el lado contrario



8º Unimos todos los puntos obtenidos sobre la circunferencia, recordando contar con el punto 0 del diámetro



LASLAMINAS.ES

EPV 3º ESO: Trazados Geométricos Básicos
Inscripción de polígonos de n (13) lados

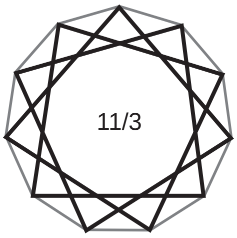
Los polígonos estrellados se obtienen uniendo de forma constante y no consecutiva los vértices de los polígonos regulares.
Según el número de vértices que tenga el polígono no estrellado podremos obtener ninguno, uno o varios polígonos estrellados:

nº de vértices	nº de estrellas	forma de unir los vértices
5	1	2
6	0	-
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
...	...	...

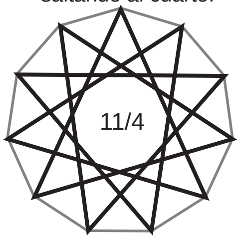
Para ilustrar el cuadro de la izquierda tomamos el ejemplo del eneágono, del cual podemos obtener hasta cuatro estrellas dependiendo del número de vértices que saltemos.

Uniendo vértices saltando al segundo.

Uniendo vértices saltando al tercero.



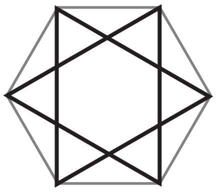
Uniendo vértices saltando al cuarto.



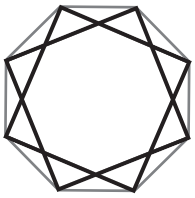
Uniendo vértices saltando al quinto.

Se definen por N/M siendo N el numero de vértices polígono del regular convexo y M el salto entre vértices. N/M ha de ser fracción irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado que indica la fracción.

FALSAS ESTRELLAS



La estrella de David.

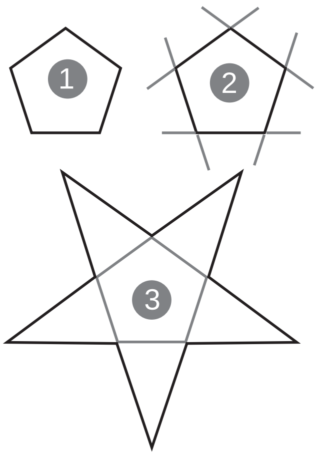


Falso Octógono estrellado.

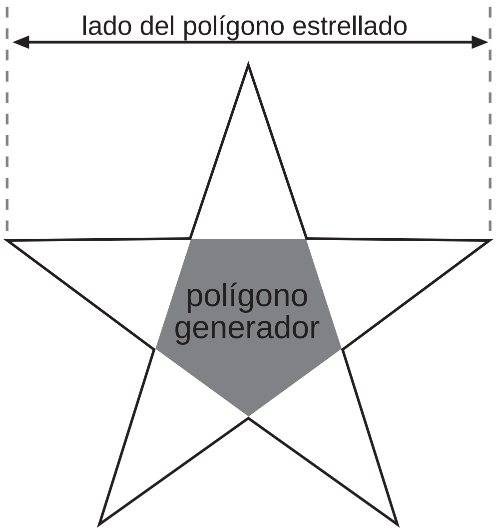
En algunos casos al unir los vértices de forma alterna podemos encontrarnos con que en realidad inscribimos otros polígonos convexos dentro del polígono inicial. En esos casos no obtendremos verdaderos polígonos estrellados sino FALSAS ESTRELLAS.

ESTRELLAR POLÍGONOS

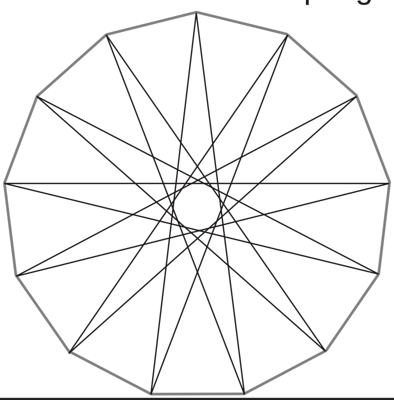
Estrellar un polígono consiste en prolongar sus lados para que se corten nuevamente entre sí, así se obtiene un nuevo polígono con forma de estrella.



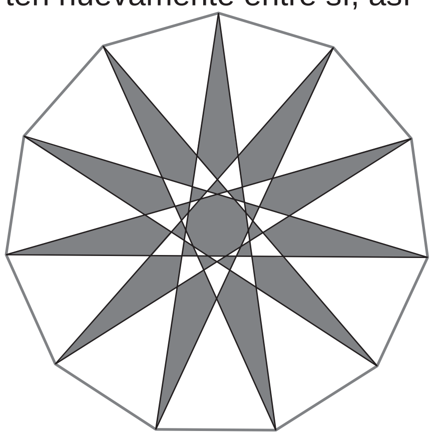
A la izquierda podemos ver el proceso de estrellar un pentágono.
Para este polígono solo podemos estrellarlo una vez, pues el pentágono únicamente genera un polígono estrellado.
Al pentágono estrellado también se le llama generalmente PENTAGRAMA o pentáculo y es una figura muy significativa simbólicamente, sobre todo por contener la proporción divina oculta en sus medidas



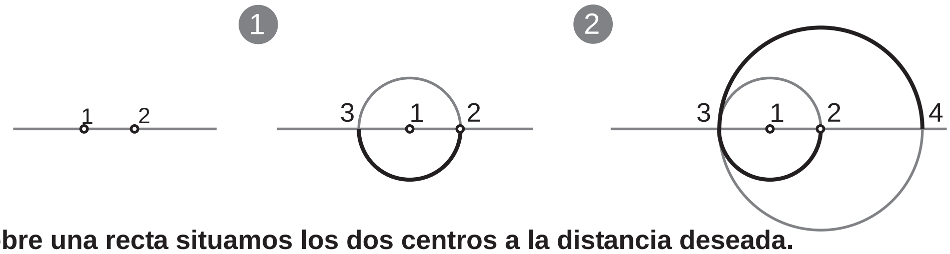
Estrellar un polígono consiste en prolongar sus lados para que se corten nuevamente entre sí, así se obtiene un nuevo polígono con forma de estrella.

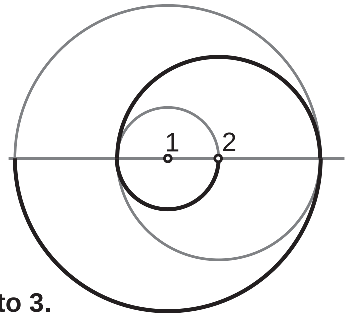


Si estrellamos un polígono convexo observamos que la primera estrella que se genera es la que se produce al saltar el menor número de vértices. Si continuamos estrellándola conseguiremos la segunda estrella. Y así sucesivamente podremos dibujar, unas dentro de otras, todas las estrellas posibles que dicho polígono nos ofrece. Lo mismo ocurre si inscribimos la estrella empezando por el máximo salto de vértices (procedimiento inverso).



Trazado de una espiral de dos centros:



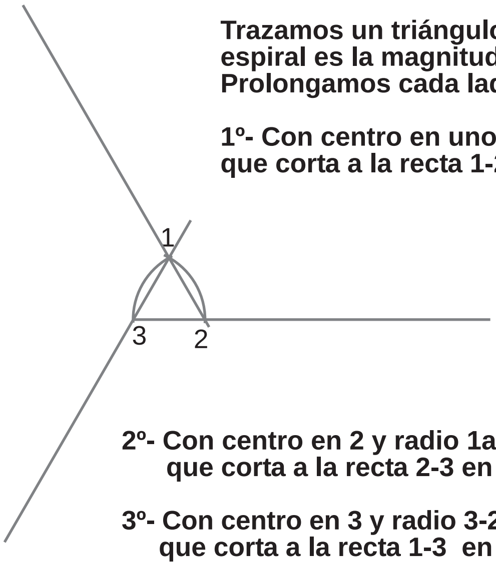


Sobre una recta situamos los dos centros a la distancia deseada.

1º- Con centro en 1 y radio 1-2 trazamos una semi-circunferencia que nos da el punto 3.
2º- Con centro en 2 y radio 2-3 trazamos una semi-circunferencia, en el lado opuesto a la primera. Obtenemos el punto 4.
3º- Con centro en 1, de nuevo, trazamos una semicircunferencia de radio 1-4, obteniendo el punto 5.

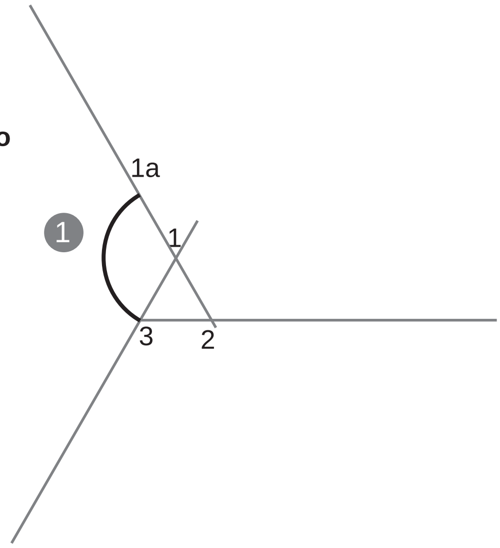
Se trata de alternar los centros uno y dos, trazando semi-circunferencias, siempre en el mismo lado para cada centro y abriendo el compás el radio máximo posible en cada paso.

Trazado de una espiral de tres centros dado el paso
Trazado de una espiral de tres centros situados en los vertices de un triángulo equilatero:



Trazamos un triángulo equilátero (el paso de la espiral es la magnitud del lado del triángulo)
Prolongamos cada lado por uno de sus extremos.

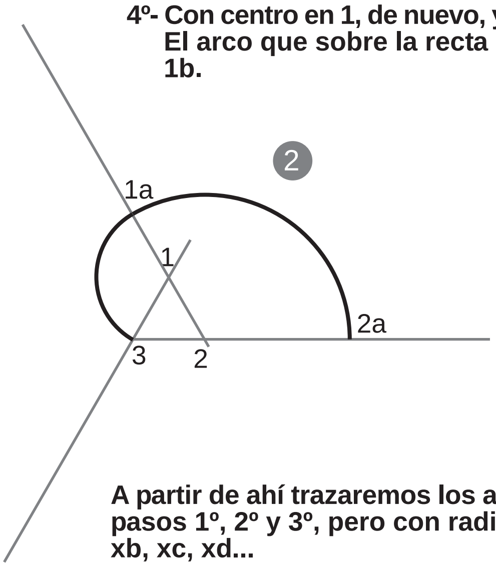
1º- Con centro en uno y radio 1-3 trazamos un arco que corta a la recta 1-2 en el punto 1a

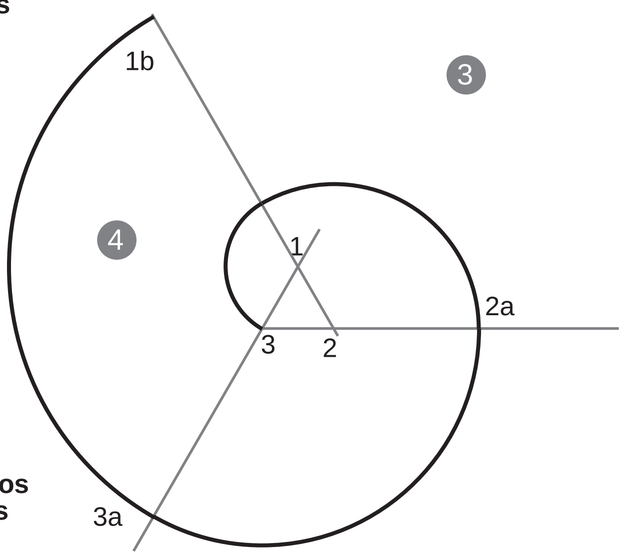


2º- Con centro en 2 y radio 1a, trazamos un arco que corta a la recta 2-3 en el punto 2a.

3º- Con centro en 3 y radio 3-2a trazamos un arco que corta a la recta 1-3 en el punto 3a.

4º- Con centro en 1, de nuevo, y radio 1-3, trazamos El arco que sobre la recta 1-2 nos da el punto 1b.



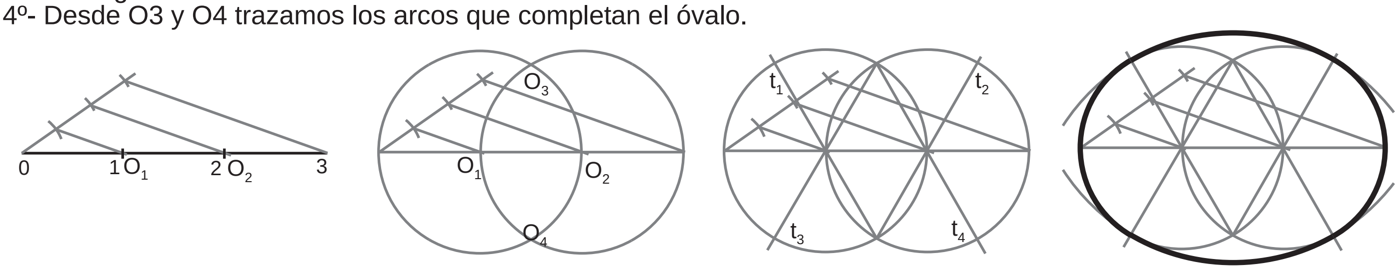


A partir de ahí trazaremos los arcos sguiguiendo los pasos 1º, 2º y 3º, pero con radios hasta los puntos xb, xc, xd...

Observar, en ambas espirales, como cada sector de arcos siempre tiene el mismo centro, es decir, para formar la espiral trazamos arcos concéntrricos. El diametro o rádio de cada arco va incrementandose sucesivamente en función del paso y del nº de centros.

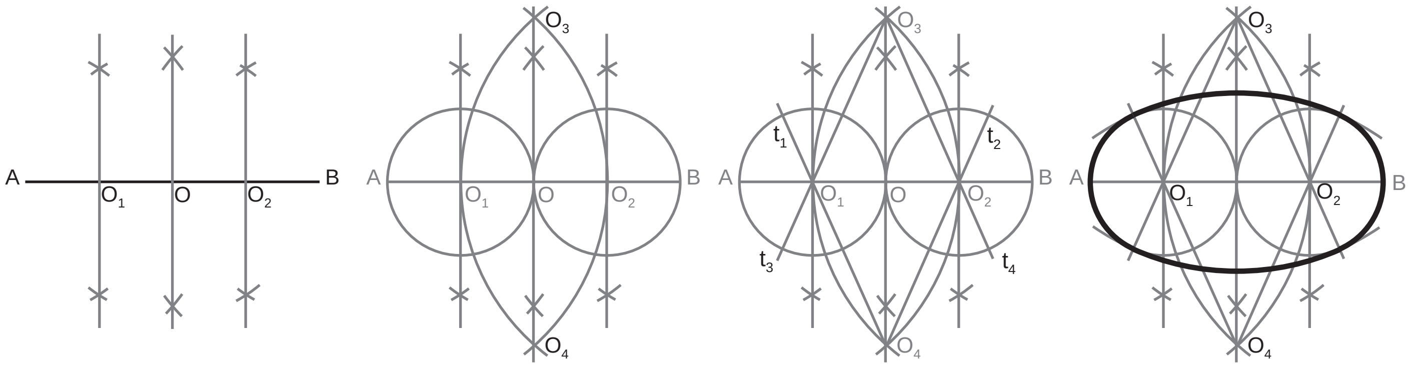
Óvalo dado el eje mayor (metodo 1)

1º- Dividimos el eje mayor dado en tres partes iguales. Los dos puntos que lo dividen serán dos de los centros
2º- Trazamos dos circunferencias desde O_1 y O_2 y radio hasta los extremos del eje, los dos puntos de intersección serán los otros dos centros del óvalo.
3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2, los puntos en que las rectas cortan las dos circunferencias trazadas serán los puntos de tangencia.
4º- Desde O3 y O4 trazamos los arcos que completan el óvalo.



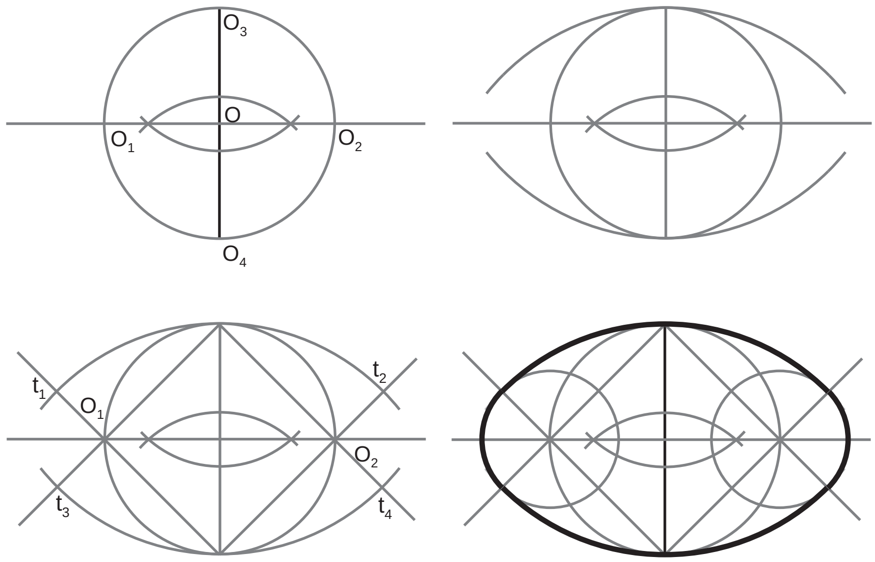
Óvalo dado el eje mayor (metodo 2)

1º- Trazamos la mediatriz del eje AB obteniendo O.Trazamos mediatrices a los dos semi-ejes obteniendo O_1 y O_2
2º- Trazamos dos circunferencias desde O_1 y O_2 abriendo el comás hasta O. Desde A y B trazamos dos arcos abriendo el compás hasta O los dos puntos de intersección con la primera mediatriz serán los otros dos centros del óvalo.
3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2, los puntos en que las rectas cortan las dos circunferencias trazadas serán los puntos de tangencia.
4º- Desde O3 y O4 trazamos los arcos que completan el óvalo.



Óvalo dado el eje menor

1º- Colocando el eje dado en posición vertical, trazamos su mediatriz y desde su punto medio (O) trazamos una circunferencia con diámetro igual al eje dado, obteniendo así los cuatro centros del óvalo.
2º- Desde los extremos del eje menor trazamos dos arcos de radio igual a la totalidad del mismo.
3º- Unimos O_3 y O_4 con O_1 y O_2 obteniendo sobre ambos arcos los puntos de tangencia.
4º- Con centro en O1 y O2 trazamos los arcos necesarios para completar el óvalo abriendo el compás hasta los puntos de tangencia.



El **óvalo** es una curva cerrada y plana que está compuesta por cuatro, o más, arcos de circunferéncia simétricos entre sí. Suele venir definido por dos ejes que marcan sus dimensiones y sirven de ejes de simetría de los arcos. Se emplea frecuentemente en perspectivas axonométricas para representar la circunferencia vista en perspectiva.

El **ovoide** es un caso particular de óvalo, se define por dos ejes perpendiculares entre sí: el mayor que actua de eje de simetría y el menor menor, perpendicular al primero.

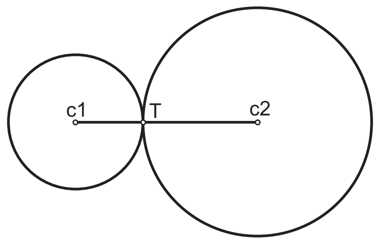
Las Tangencias

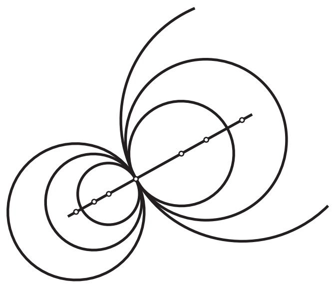
Dos elementos son tangentes cuando tienen un punto en común denominado punto de tangencia. Estos elementos son circunferencias (o arcos de circunferencia, en algunos casos curvas conicas también) y rectas.

Un enlace es la unión armónica de curvas con curvas o curvas con rectas. Los enlaces son la aplicación práctica de las tangencias.

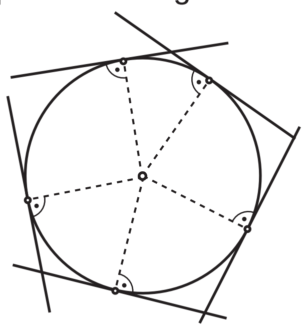
Propiedades fundamentales de las tangencias

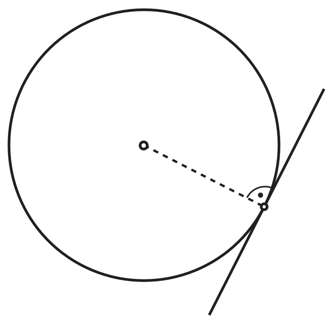
1- Los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.

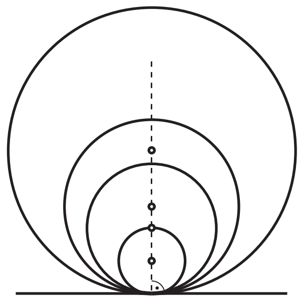




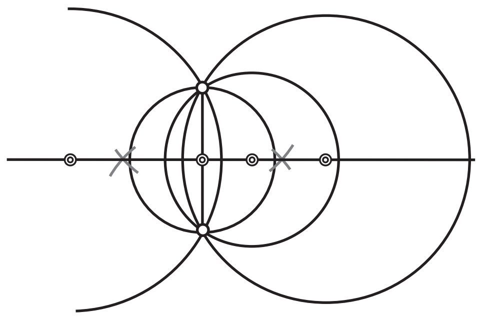
2- Una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

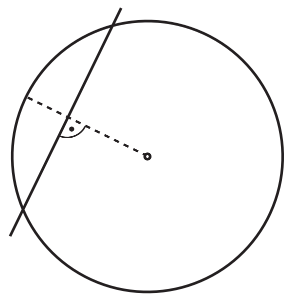




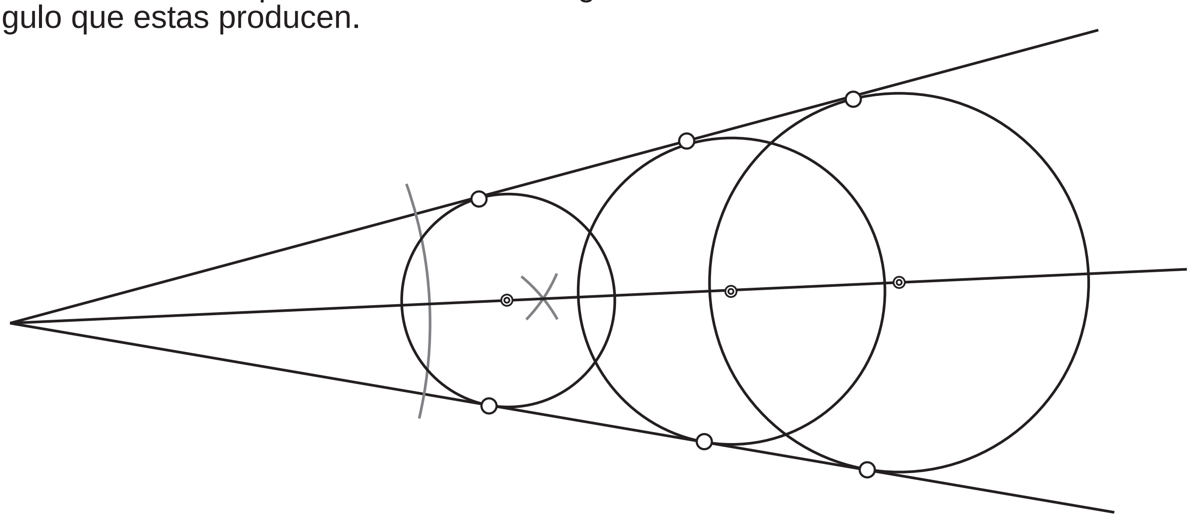


3- El centro de cualquier circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que definen los dos puntos.Todo radio perpendicular a una cuerda de circunferencia divide a esta en dos mitades iguales.



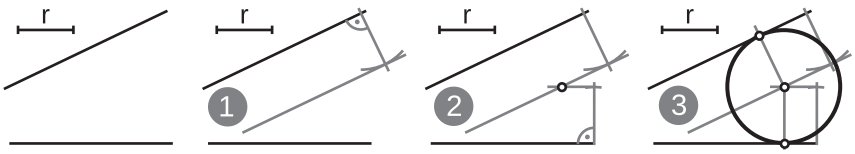


4- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que estas producen.



TANGENCIAS DADOS DOS ELEMENTOS (rectas o circunferencias) y el radio de la circunferencia solución.

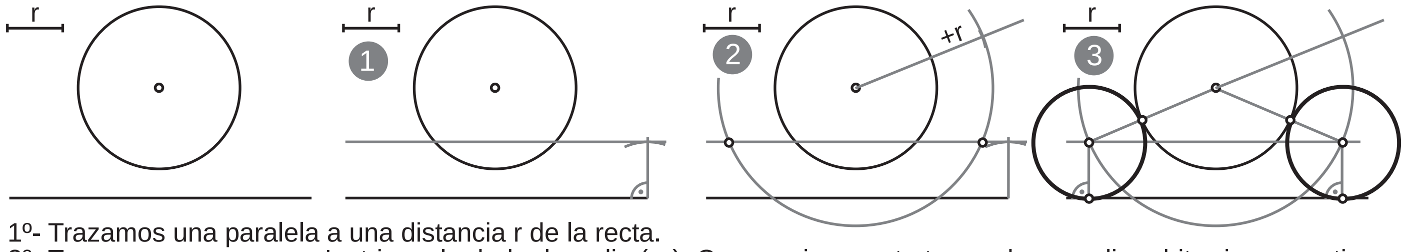
Dadas dos rectas, trazar la circunferencia de radio r tangente a ambas.



1º- Trazamos una paralela a una distancia r de una recta.
2º- Hacemos lo mismo con la otra recta. Donde las paralelas se cortan es el centro de la solución.

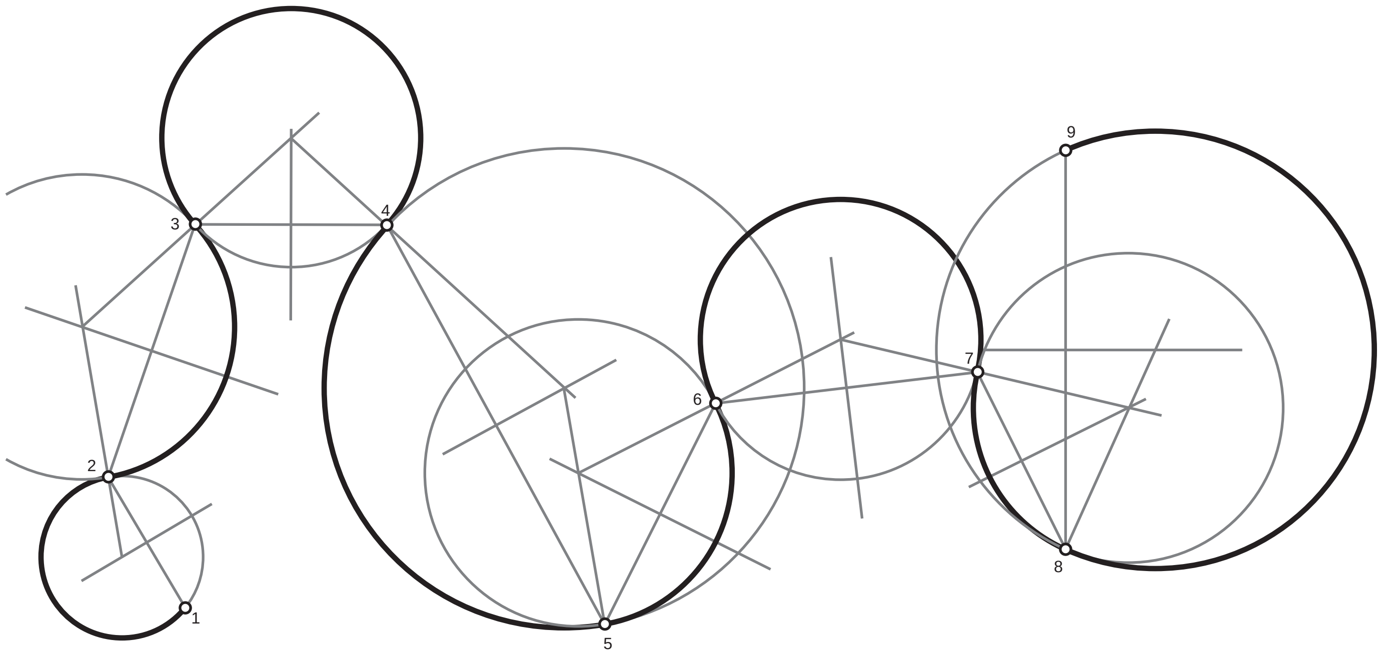
3º- Desde el centro trazamos perpendiculares a las rectas del enunciado para hallar los ptos. de tg. Trazamos la cir.

Dada una recta y una circunferencia, trazar la circunferencia de radiodado r (menor al radio de la dada) tangente a ambas.



1º- Trazamos una paralela a una distancia r de la recta.
2º- Trazamos un arco conc'entrico a la dada de radio (+r). Conseguimos esto trazando un radio arbitrario y a partir del punto de corte con la circunferencia transportar la medida (r). Los puntos de intersección con la recta paralela serán los centros de las circunferencias soluciones. (coincidencia de sos lugares geométricos)
3º- Hallamos los puntos de tangencia: a partir de los centros perpendiculares a las rectas y segmentos con el otro extremo en la circunferencia de la dada. Trazamos las circunferencias que solucionan el problema.

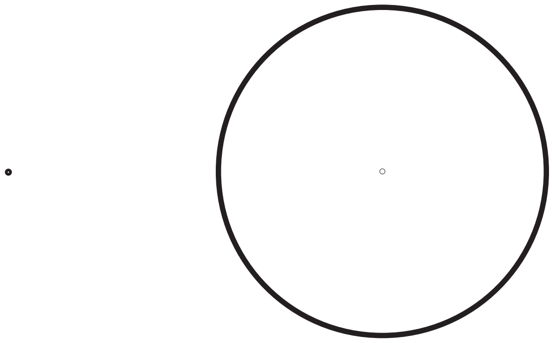
ENLACES DE PUNTOS MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES



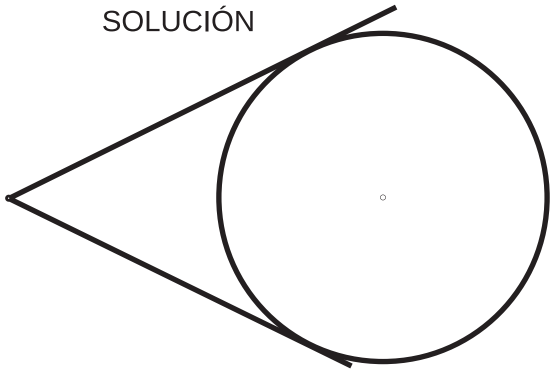
1º- El primer arco nos lo dan con su centro o lo trazamos nosotros sobre la mediatriz del segmento que une los dos puntos. LOS CENTROS DE ARCOS QUE PASAN POR LOS EXTREMOS DE SEGMENTOS SIEMPRE ESTÁN SOBRE LA MEDIATRIZ.
2º- Podemos unir los puntos con segmentos a medida hacemos los arcos o unirlos todos al principio.
3º- A cada segmento le trazaremos su mediatriz. Uniremos el último punto de cada arco con su centro y en la prolongación de esa recta, SOBRE LA MEDIATRIZ, encontraremos el siguiente arco.
4º- Procederemos del mismo modo hasta acabar los puntos.

En el enunciado se presenta una circunferencia con su centro y un punto exterior a ella. Se piden las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto exterior

ENUNCIADO



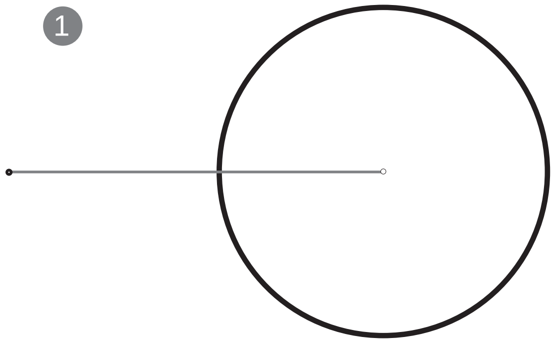
SOLUCIÓN



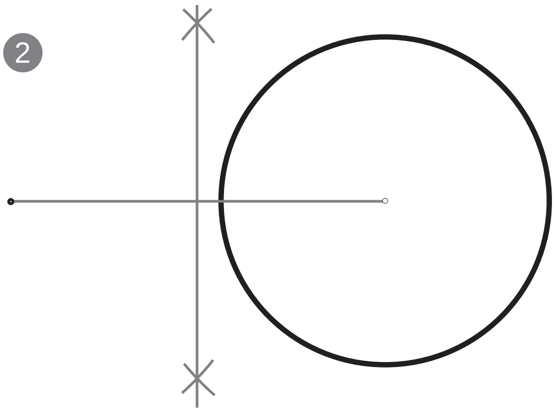
Para resolverlo necesitamos trazar ciertos trazados auxiliares que se pueden explicar cuatro pasos

1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto exterior a ella trazando un segmento.
2º-Trazamos la mediatriz del semento obteniendo el punto medio de este.
3º- Con centro en el punto medio y radio hasta el punto exterior o el centro (lo cual es lo mismo), trazamos una circunferencia que corta a la dada en dos puntos, los Puntos de tangencia.
4º Trazamos radios hasta los puntos de tangencia
5º Desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia trazamos las rectas que son solución

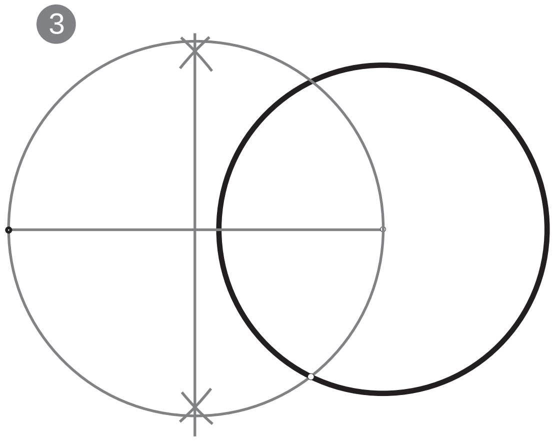
1



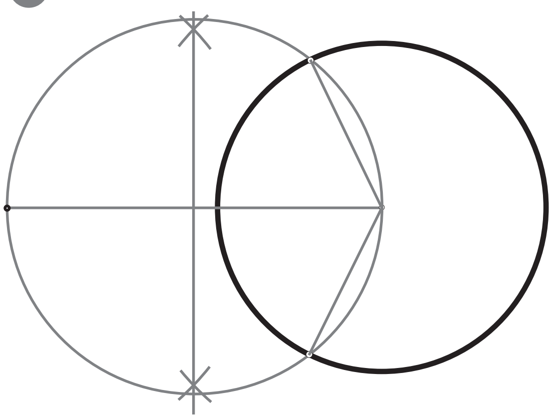
2



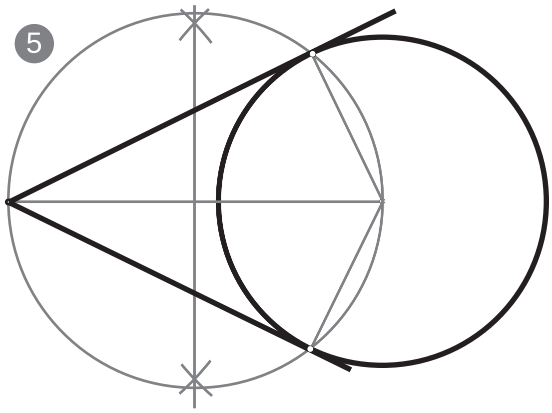
3



4

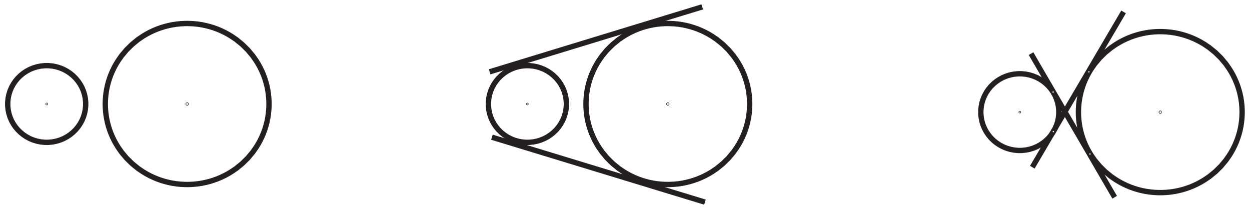


5



Tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias

ENUNCIADO — SOLUCIÓN tangentes exteriores — SOLUCIÓN tangentes interiores

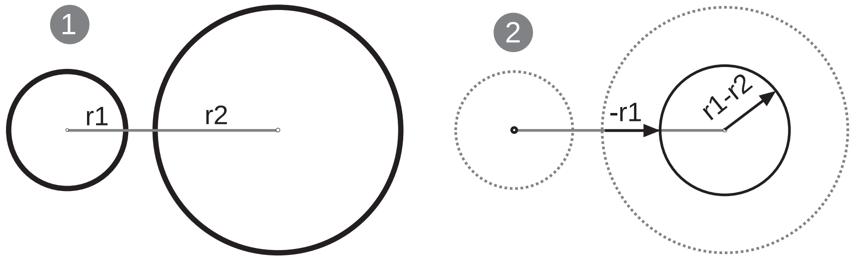


Para resolver estos dos problemas necesitamos reducirlos al problema pto-circunferencia. tendremos que hacer el esfuerzo de "olvidarnos" (ignorar visualmente) el enunciado original y resolver el problema pto-circunferencia. una vez conseguido el resultado del problema original no trae mas dificultad que llevar las rectas y los radios a su sitio trazando paralelas con escuadra y cartabón

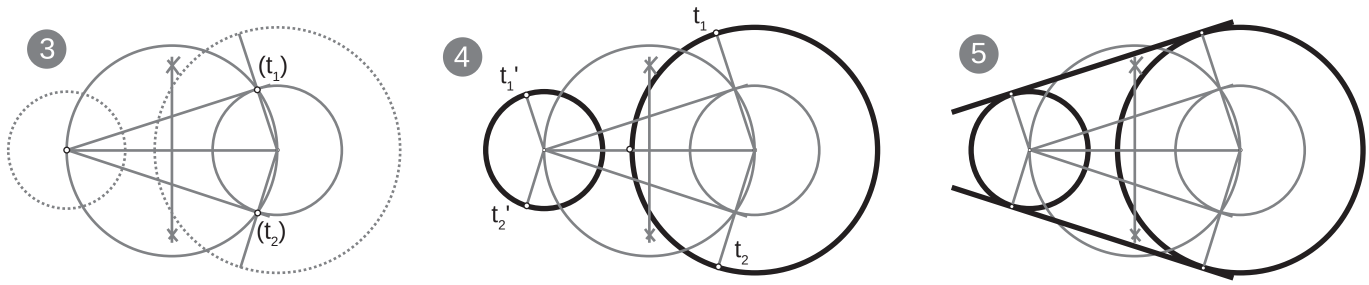
Tangentes exteriores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros
2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le restamos el radio de la circunferencia pequeña.

DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA



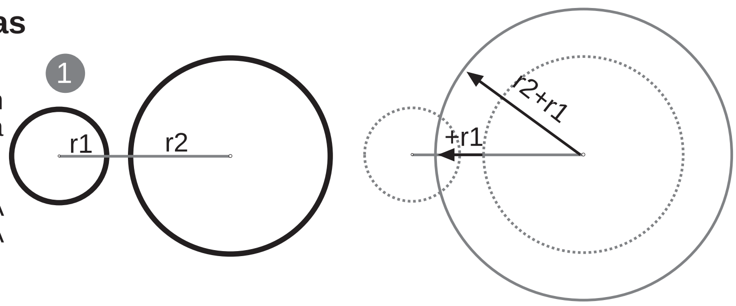
3º- Resolvemos el problema reducido, trazamos los radios que van a (t1) y (t2) lo suficientemente largos para que corten a la circunferencia grande original.
4º- A partir del centro de la circunferencia pequeña original trazamos radios con la misma inclinación (escuadra y cartabón). Así,con los cuatro radios trazados obtenemos t1 yt2 sobre la grande y t1' yt2' sobre la pequeña
5º- Unimos t1 con t1' y t2 con t2'



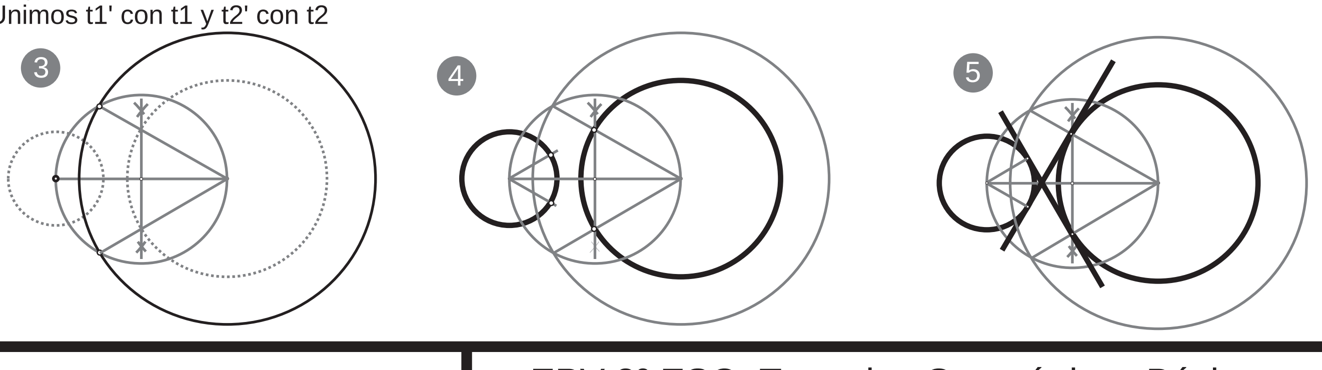
Tangentes interiores a dos circunferencias

1º Trazamos el segmento que une los dos centros
2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le sumamos el radio de la circunferencia pequeña.

DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA



3º- Resolvemos el problema reducido,obteniendo así (t1) y (t2), pero esta vez no trazamos las rectas tangentes para no contaminar con demasiadas lineas el dibujo.
4º- Trazamos radios paralelos a los de la circunferencia grande en la circunferencia pequeña, pero invirtiendo su posicion (el radio de arriba en la grande, abajo en la pequeña y viceversa). Los puntos de tangencia del problema original se encuentran en las intersecciones de los radios.
5º- Unimos t1' con t1 y t2' con t2



LA ELIPSE:

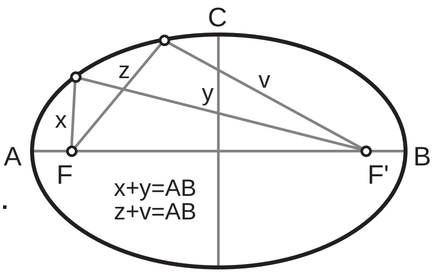
"la elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de radio vectores (distancias desde la elpise a los dos focos) es constante e igual al eje mayor".

Elementos paramétricos:
son las tres magnitudes que caracterizan la elipse.

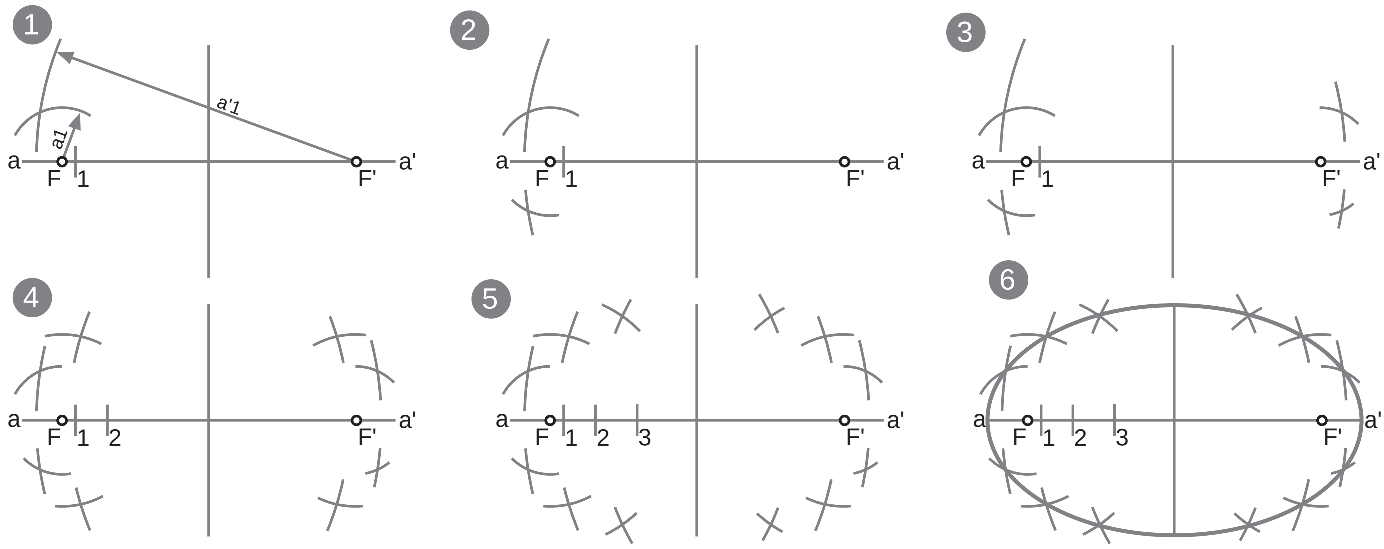
1. Eje mayor AB: llamado real o principal. Es eje de simetría.
2. Eje menor CD: llamado imaginario o secundario. También es eje de simetría

Ambos son perpendiculares entre sí cortándose en sus puntos medios.

3. Focos F, F': Puntos fijos sobre el eje mayor, de referencia de distancias



Trazado de la elipse por puntos



1º- Marcamos un punto arbitrario (1) sobre el eje mayor. Con centro en F y radio a1 trazamos un arco en el primer cuadrante de la elipse y con centro en F' y radio a'1 trazamos otro arco tambien en el primer cuadrante. El punto dónde se cortan ambos arcos pertenece a la elipse ya que se cumple a1+a'1=aa'

2º- Con los mismos radios y los mismos centros podemos obtener el punto simetríco en el tercer cuadrante.

3º- Con los mismos radios pero invirtiendo los centros hallamos los puntos simétricos respecto a eje menor a los otros dos.

4º- Marcamos otro punto (2) sobre el eje mayor y repetimos la operación de los pasos 2º y 3º, así obtenemos otros cuatro puntos de la elipse

5º- Marcamos un tercer punto y repetimos de nuevo la operación de los pasos 2º y 3º. Con 12 puntos podemos intuir el recorrido de la elipse, aunque podemos repetir la operación para conseguir más puntos.

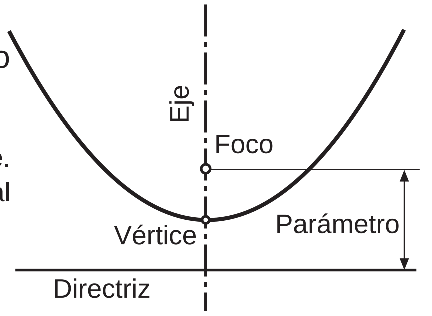
6º- Unimos lospuntos a mano alzada.

LA PARÁBOLA:

"la parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz.

Elementos paramétricos: Llamamos así a los tres elementos que intervienen directamente en la determinación de su parámetro: elemento dado, en magnitud y posición, con el que queda determinada una parábola.

1. Foco F: punto de tangencia de la esfera (tangente al cono) con el plano secante.
2. Directriz d: recta intersección del plano X con el plano secante. Perpendicular al eje de simetría.
3. Vértice A: Vértice extremo del eje, y por tanto de la curva. Se encuentra en el punto medio entre el foco y la diectriz.

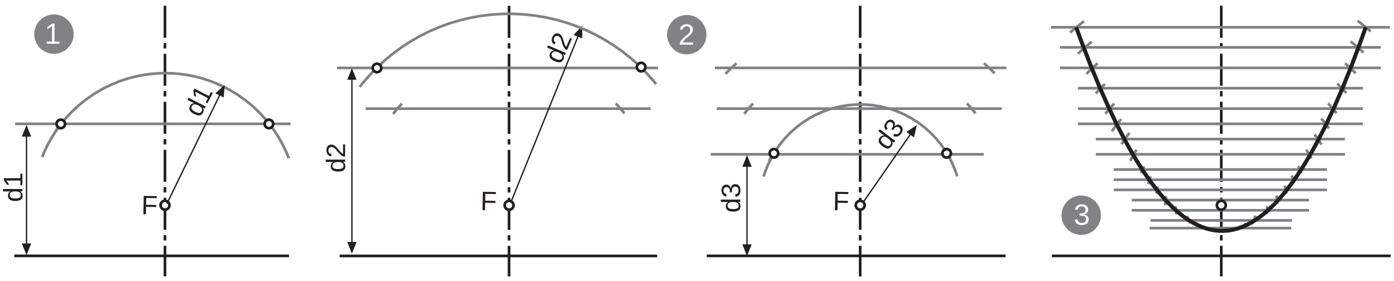


Trazado de la parábola dado el foco y la directriz:

1º- Trazamos una paralela a la directriz a una distancia d. Con centro en F trazamos un arco de radio d que corta a la paralela en dos puntos pertenecientes a la parábola.

2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Por último unimos los puntos obtenidos para obtener la parábola.



LA HIPÉRBOLA:

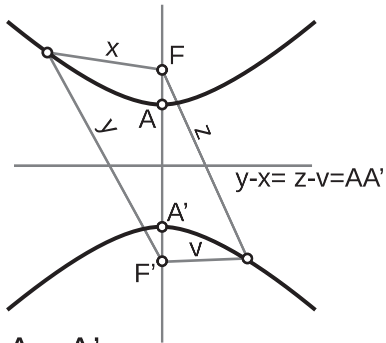
"la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la distancia entre ellos".

Elementos paramétricos:
son las tres magnitudes que caracterizan la hipérbola.

1. Eje real AA': o principal. Se representa por 2a.
2. Eje imaginario CD: o secundario. Se representa por 2b.

Ambos son perpendiculares entre sí.

3. Focos: puntos fijos sobre el eje AA', de referencia de distancias.

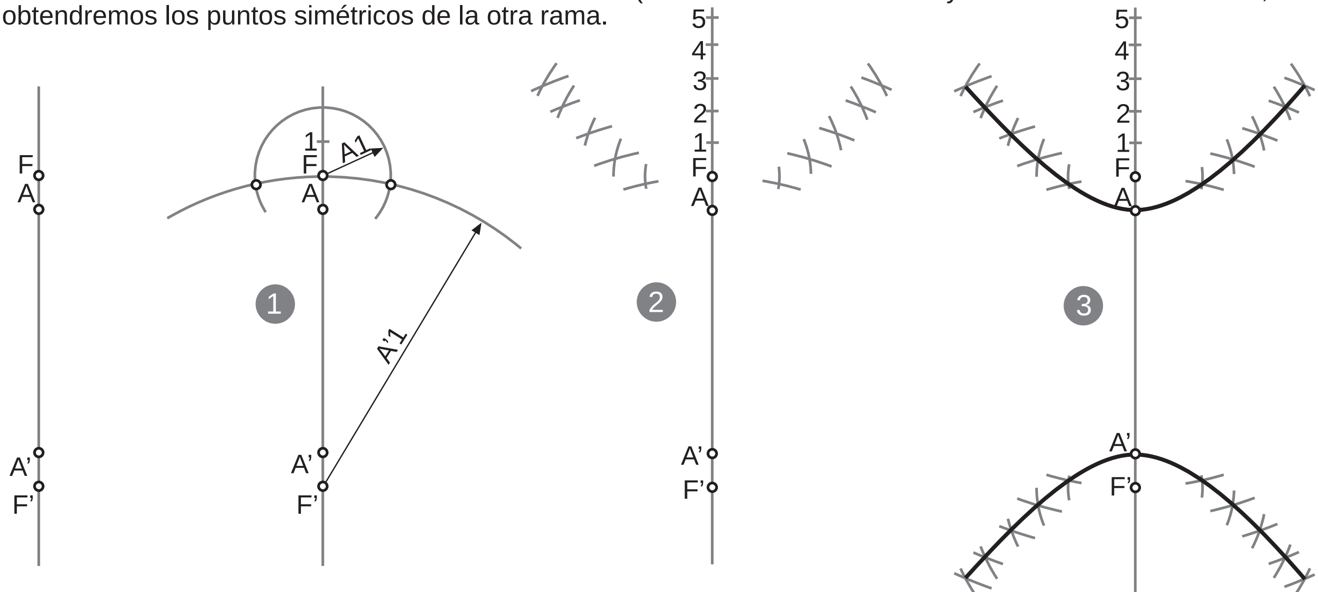


Trazado de la hipérbola dados los focos F y F' y Los vértices A y A':

1º- Tomamos un punto sobre el eje FF'. Con centro en F y radio A1 trazamos un arco y con centro en F' y radio A'1 trazamos otro arco, los dos puntos de intersección de los arcos son puntos de la hipérbola.

2º- Repetimos este procedimiento tantas veces como pares de puntos simétricos deseemos obtener.

3º- Si tomando los mismos radios invertimos los centros (radio A1 con centro en F' y radio A'1 con centro en F, etc obtendremos los puntos simétricos de la otra rama.



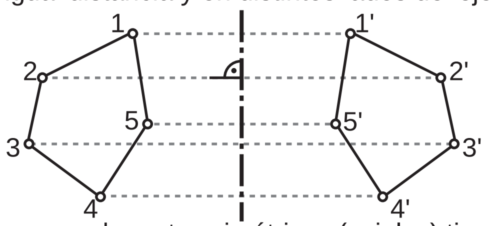
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO: GIROS, TRASLACIONES, HOMOTECIA E INVERSIÓN

ISOMÉTRICAS (= medida)	Entre la figura original y la transformada se mantienen las magnitudes lineales y los ángulos	GIROS TRASLACIÓN SIMETRÍA
ISOMÓRFICAS (= forma)	Mantienen la misma forma pero no el tamaño.	HOMOTECIA
ANAMÓRFICAS	Cambia el tamaño y el valor angular.	INVERSIÓN HOMOLOGÍA AFINIDAD

SIMETRÍA

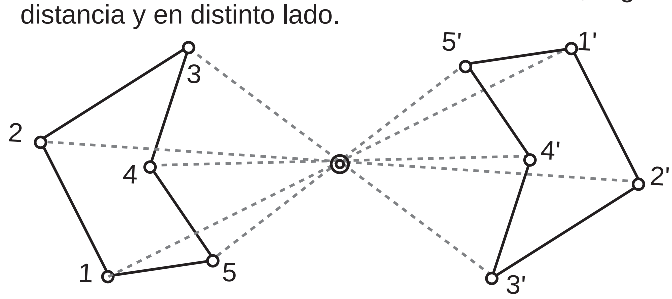
SIMETRIA:Es una transformación geometrica en la que todo punto y su simétrico (relación biunívoca) se encuentran a distinto lado de un centro o un eje y a igual distancia de este. Existen dos tipos de simetría:

SIMETRÍA AXIAL (eje): Los puntos simétricos se encuentran sobre una perpendicular al eje de simetría, a igual distancia y en distintos lados del eje.



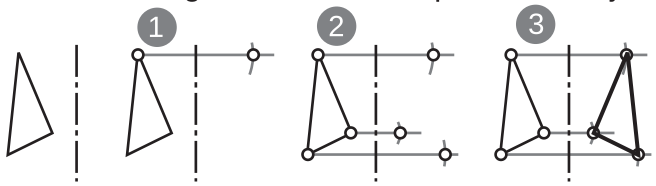
Los pares de rectas simétricos (axiales) tienen su intersección sobre el eje de simetría. Cuando el eje de simetría corta una recta, la recta simétrica cortará a la primera sobre el eje de simetría y el punto de intersección será un PUNTO DOBLE. cualquier punto que esté sobre el eje de simetría tiene su simétrico en el mismo punto, a estos les llamamos PUNTOS DOBLES.

SIMETRÍA CENTRAL (centro-punto): Los puntos simétricos se encuentran alineados con el centro, a igual distancia y en distinto lado.



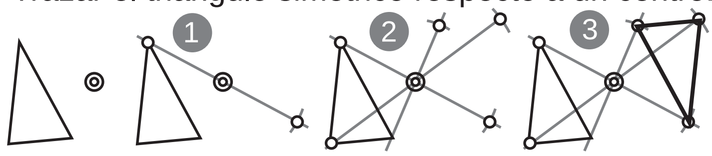
La simetría central equivale a un giro de 180º con el mismo centro. La rectas o segmentos simétricos respecto a un centro son paralelas.

Trazar el triángulo simétrico respecto a un eje.



1º- A patrir de un vértice trazamos una perpendicular al eje. En el punto de intersección hacemos centro de compás y trasladamos la distancia del eje al punto al otro lado para obtener el punto simétrico del vértice.
2º- Repetimos la operación con los demás vértices.
3º- Unimos los vértices simétricos

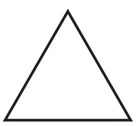
Trazar el triángulo simétrico respecto a un centro.



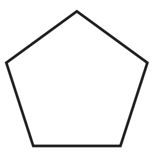
1º- A patrir de un vértice trazamos una recta que pase por el centro de simetría. En el centro hacemos centro de compás y trasladamos la distancia del centro al punto al otro lado para obtener el punto simétrico del vértice.
2º- Repetimos la operación con los demás vértices.
3º- Unimos los vértices simétricos

Se llama ORDEN de SIMETRÍA (n) al número de veces que hay que rotar el ángulo menor (a) para dar una vuelta completa (n = 360º/ a) o, al número de figuras idénticas que forman la figura completa.

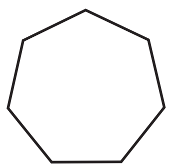
Así pues los polígonos regulares cumplen con una simetría radial de orden igual a su número de lados.



Simetría de orden 3



Simetría de orden 5

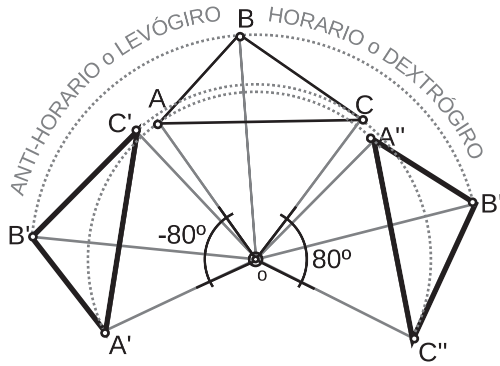


Simetría de orden 7

GIRO O ROTACIÓN

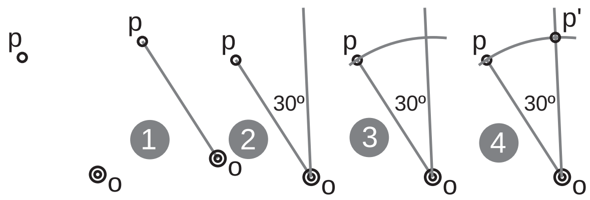
Es una transformación geométrica en la que intervienen: un centro, una magnitud angular y un sentido de giro.

El sentido puede ser HORARIO (dextrógiro), en cuyo caso la magnitud angular será positiva o ANTI-HORARIO (levógiro) siendo la magnitud angular negativa.



GIRO DE UN PUNTO (p) RESPECTO A UN CENTRO (o):

- Girar el punto p 30 º respecto al centro o.



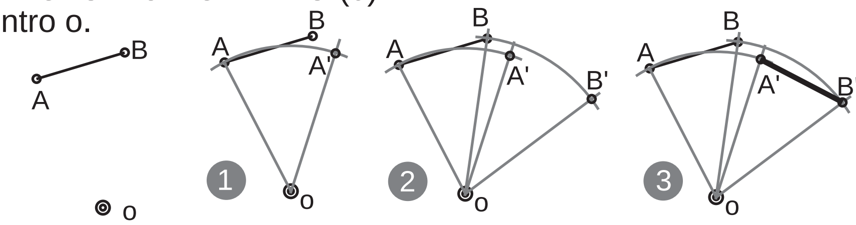
1º- Trazamos el segmento op.
2º- Con vértice en o, ayudandonos del cartabón o transportador de ángulos trazamos otro segmento que determina un ángulo de 30º.
3º- Con centro en o y radio op trazamos un ángulo que corta al segmento anterior.
4º- En la intersección del arco con el segundo segmento tenemos el punto p', resultado degirar p 30º.

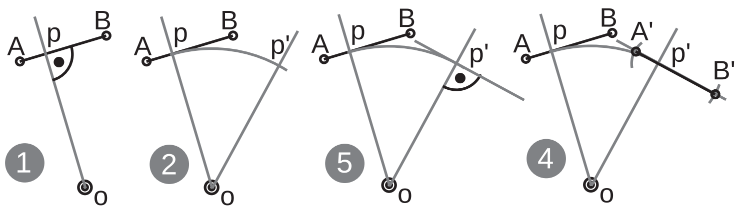
GIRO DE UN SEGMENTO (AB) RESPECTO A UN CENTRO (o):

- Girar el punto AB 45 º respecto al centro o.

Por puntos:

1º- Empleando el procedimiento anterior, giramos el punto A.
2º- Igualmente giramos B.
3º- Unimos A' con B'.



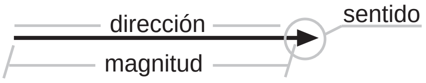


Trazando perpendicular al segmento:

1º-Desde el cento o trazamos una perpendicular al segmento AB obteniendo p.
2º-Giramos p, obteniendo p'
3º-Trazamos por p' una perpendicular a su radio.
4º- Sobre esta perpendicular, desde p,copiamos las distancias pA y pB. Trazamos el segmento A'B'.

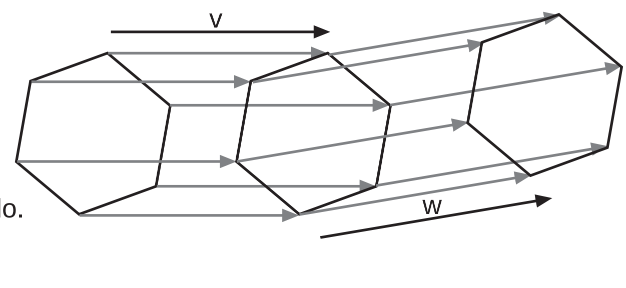
TRASLACIÓN

Es una transformación geométrica o movimiento en el plano que viene determinada por un vector.
Un vector está determinado por una magnitud (distancia), dirección y sentido



Una traslación puede venir definida por:

1- Una figura y un vector de traslación.
2- Un par de puntos (original y trasladado.

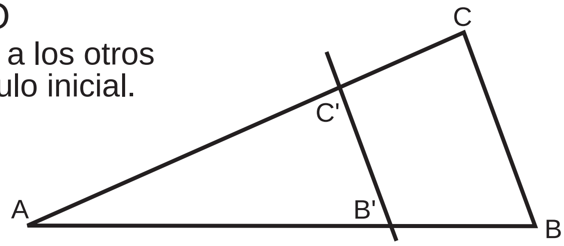


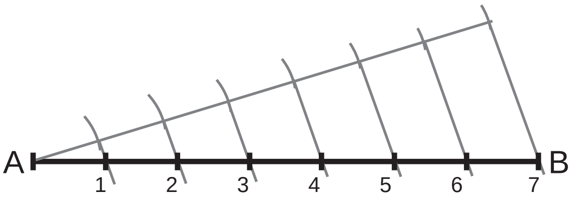
Es tán sencillo como hacer paralelas a la dirección del vector y en el sentido indicado por la flecha desde los vértices de la figura, copiando la magnitud con el compás, para obtener la figura transformada.

TEOREMA DE THALES DE MILETO

Toda recta paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos lados, determina otro triángulo semejante al triángulo inicial.

$$CB/C'B'=AC/AC'=AB/AB'$$

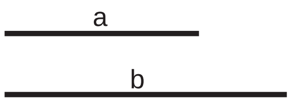


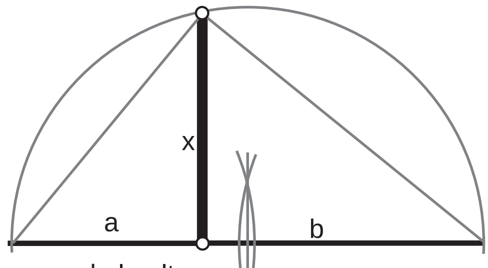


Si se cortan dos rectas concurrentes con un haz de rectas paralelas, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

SEGMENTO MEDIO PROPORCIONAL (x) A OTROS DOS (a,B)

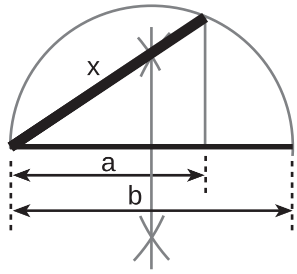
Resulta como derivación del teorema de pitágoras.Dados los segmentos (a) y (b) buscamos otro (x) que cumpla: $a{\cdot}b=x^2$.



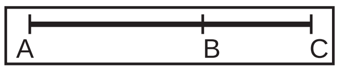


Teorema de la altura

Teorema del cateto



SECCIÓN AUREA DE UN SEGMENTO:

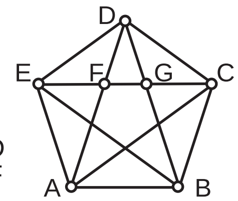


La sección aurea de un segmento es un punto que lo divide en dos partes de tal modo que:

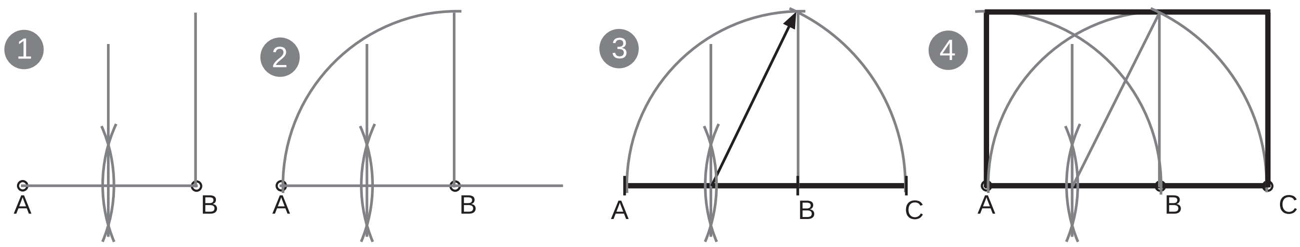
$AC / AB = AB / BC = \Phi = 1'6180...$

Φ tiene relación directa con el las medidas del pentágono regular y estrellado, asi como con la suceción de fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13...

1,618
Φ
AB/BD
EF/EF

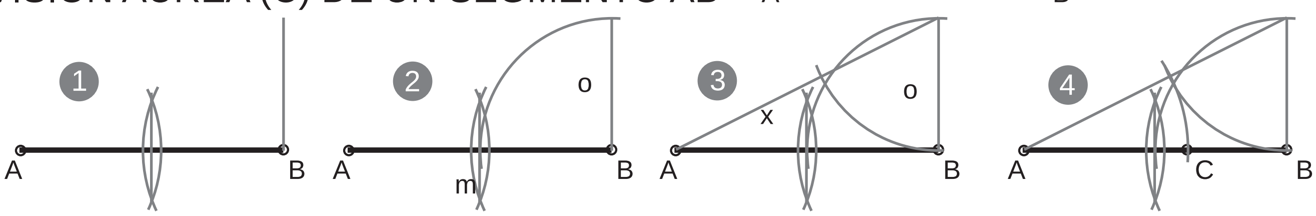


SEGMENTO AUREO (AC) de otro(AB), RECTÁNGULO AUREO:



1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio AB trasladamos la medida del segmento sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto medio del segmento y radio hasta el extremo superior de la perpendicular giramos la distancia sobre la prolongación del segmento AB hayando C.
4º- Para trazar el rectángulo aureo construimos el rectángulo de lado menor AB y lado mayor AC.

DIVISIÓN AUREA (C) DE UN SEGMENTO AB



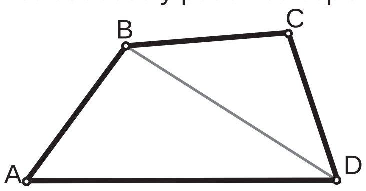
1º- Trazamos la mediatriz del segmento y levantamos una perpendicular por uno de sus extremos.
2º- Con centro en B y radio la mitad de Bm trasladamos la medida Bm sobre la perpendicular levantada.
3º- Con centro en el punto (o) y radio oB giramos la distancia sobre el segmento Ao, obtenemos x.
4º- Con centro en A y radio Ax giramos la medida sobre el segmento AB obteniendo C.

IGUALDAD

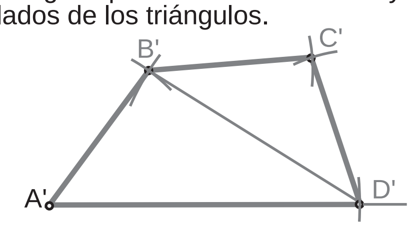
Dos figuras son iguales cuando mantienen la misma forma y el mismo tamaño. Dos figuras siguales siempre tendrán el mismo area. Para los polígonos la igualdad implica: mimas magnitudes ángulares en los vértices, misma magnitudes de los lados y por lo tanto igual superficie.

DADO EL CUADRILATERO ABCD, COPIARLO A PARTIR DE A': Por triangulación

Cualquier polígono de más de tres lados puede ser descompuesto en triángulos. Por esto, podemos descomponer el polígono que queremos copiar en los triángulos que proceda y copiar el polígono copiando los triángulos uno a uno. De este modo evitamos emplear el procedimiento de copia de ángulos que es algo impreciso si no somos muy cuidadosos y podemos copiar el polígono empleando unicamente la copia de los lados de los triángulos.

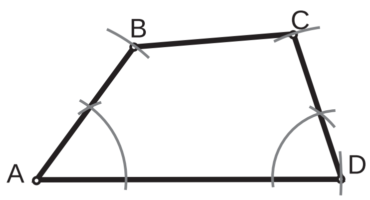


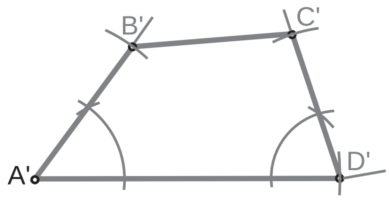
Primero copiamos el triángulo ABD a partir de A'. Una vez hecho esto copiaremos el triángulo BCD sobre el lado B'C'



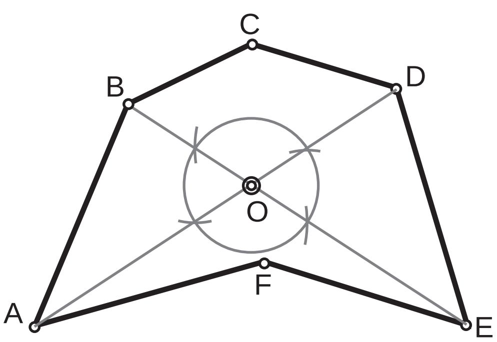
DADO EL CUADRILÁTERO ABCD, COPIARLO A PARTIR DE A': Por copia de ángulos y segmentos

Simplemente debemos emplear los procedimientos de copia de ángulos y copia de segmentos para copiar el polígono a partir del punto dado.

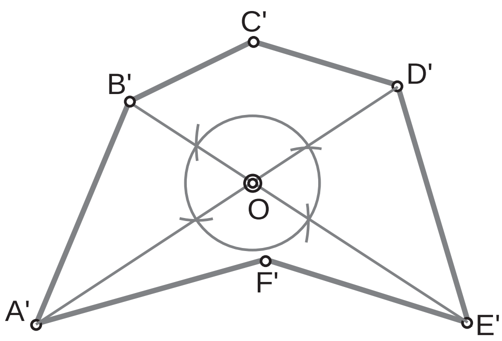




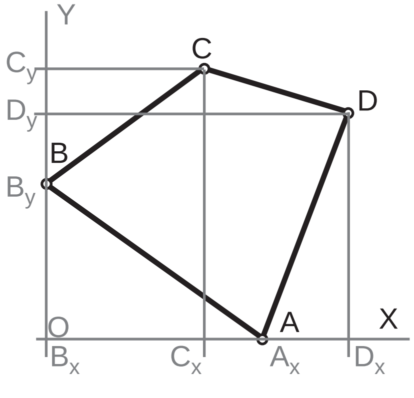
DADO EL HEXAGONO IRREGULAR ABCDEF, COPIARLO A PARTIR DE A': Por radiación



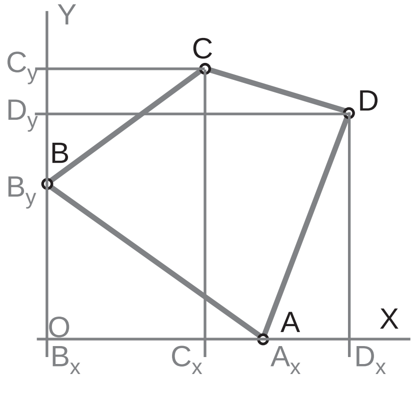
En este caso se trata de situar un centro a partir del cual se trazan rádios hasta los vértices del polígono.
Con ello trazaremos otro centro y copiaremos las magnitudes angulares entre los radios para despues copiar las distancias entre el centro y los vértices.
NOTESE como solo se traza una circungerencia para copiar las magnitudes angulares, esta debe tener igual radio en el enunciado y en el resultado.



DADO EL CUADRILATERO ABCDE, COPIARLO A PARTIR DE O':Por Coordenadas



Consiste en trazar dos ejes de coordenadas. Estos deben de formar un ángulo de 90º y si los hacemos coincidir con dos vértices del polígono ahorraremos algún paso.
Proyectaremos los vértices del polígono ortoganalmente sobre cada eje de coordenadas para después copiar las magnitudes de los segmentos para construir de nuevo el polígono.



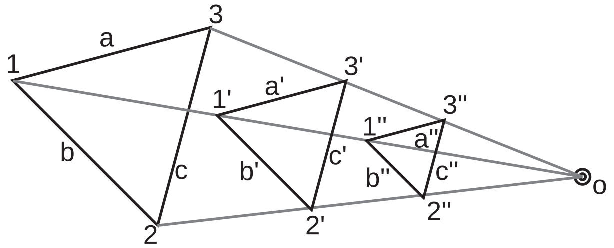
COPIA DE POLÍGONOS: Por triangulación y por copia de ángulos y segmentos, por radiación y por coordenadas.

SEMEJANZA: Dos figuras son semejantes cuando mantienen la misma forma pero tienen distinto tamaño y por lo tanto distinta area.

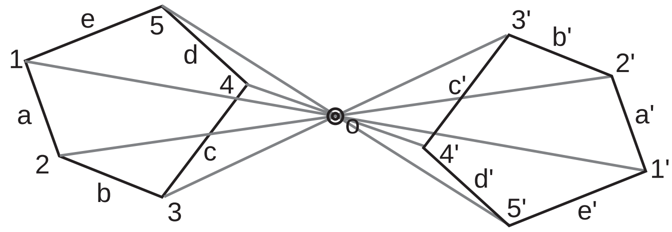
HOMOTECIA

La Homotecia es una tranformación geométrica, una correspondencia biunívoca entre dos figuras en la que se cumple que las parejas de puntos homotéticos están alineados con el centro de homotecia y los segmentos homotéticos son paralelos.

HOMOTECIA DIRECTA



HOMOTECIA INVERSA

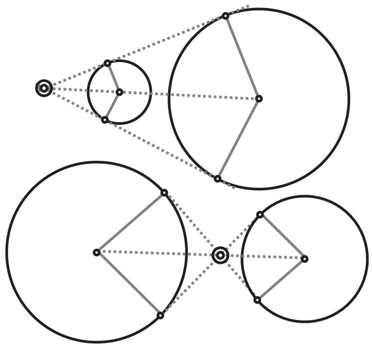


Cuando los puntos homotéticos se encuentran alineados con el centro pero en extremos opuestos de las radiaciones la homotecia es INVERSA. Cuando los dos puntos homotéticos se encuentran al mismo lado respecto al centro la homotecia es DIRECTA.

HOMOTECIA DIRECTA: Las figuras homotéticas directas son semejantes y nunca son equivalentes. El factor de proporcionalidad entre figuras homoteticas directas es siempre positiva.
HOMOTECIA INVERSA: Las figuras homotéticas inversas responden a un factor de proporcionalidad negativo, son equivalentes si el factor de proporcionalidad es -1. En este caso la figura no es semejante es el producto de dos simetrías axiales cuyos ejes, uno vertical y otro horizontal pasan por el centro de homotecia.

ELEMENTOS EN PROBLEMAS: Una homotecia queda definida al conocer algunos de los siguientes datos:

1- El centrro de homotecia y un par de puntos homotéticos.
2- El centro y la razón de semejanza o factor de proporcionalidad.
3- Dos figuras homotéticas.



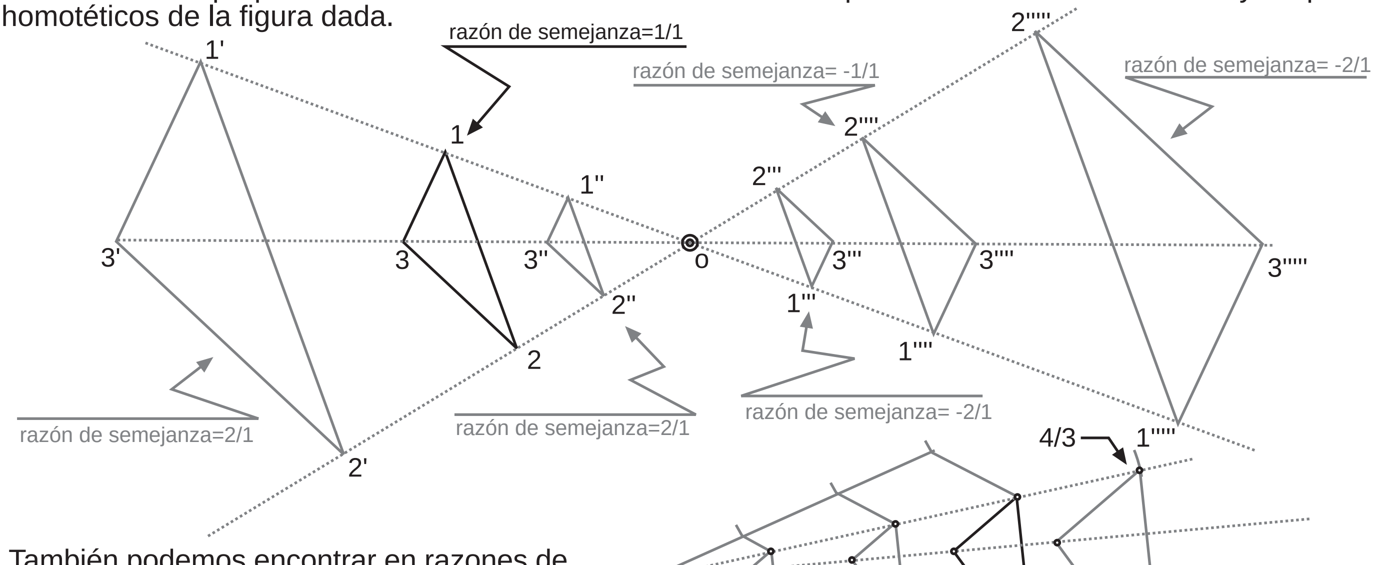
EN LA HOMOTECIA SIEMPRE SE CUMPLE

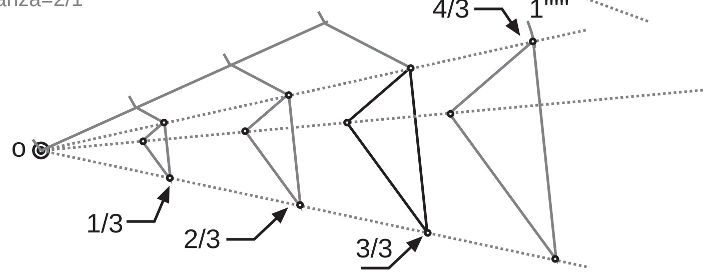
1- LOS PUNTOS homotéticos siempre están alineados con el centro de homotecia, mientras que las RECTAS homotéticas siempre son paralelas.

2- Dos CIRCUNFERENCIAS siempre son homotéticas y tienen el centro de homotecia alineado con los centros. El centro está en el punto donde se cortan las tangentes exteriores para homotecia directa y en el punto donde se cortan las tangentes interiores para la homotecia inversa. Los radios que van a parar a puntos homotéticos de las circunferencias son paralelos.

FACTOR DE PROPORCIONALIDAD EN LA HOMOTECIA (Razón de semejanza)

El factor de proporcionalidad en la homotecia viene marcado por la distancia entre el centro y los puntos homotéticos de la figura dada.





También podemos encontrar en razones de semejanza fraccionadas. Estas vienen determinadas por la división en partes iguales de la distancia entre los puntos homoteticos o uno de ellos con el centro.

ESCALAS GRÁFICAS

La escala es la relación, normalmente expresada en fracción, entre las dimensiones del gráfico o dibujo (D) y las dimensiones reales del objeto (R).

D/R: medidas del dibujo dividido por las medidas de la realidad.

Escalas de Reducción: 1/2 (1cm del dibujo se corresponden con 2cm la realidad. "La mitad de..."), 1/5 (una quinta parte de...). Se aplican principalmente en geodesia, topografía y arquitectura.

Escalas de Ampliación: 2/1 (2cm del dibujo se corresponden con 1cm de la realidad). "El doble de...", 3/2 (3cm del dibujo se corresponden con 2cm de la realidad). Se aplican principalmente en planos de diseño industrial, por ejemplo una tuerca.

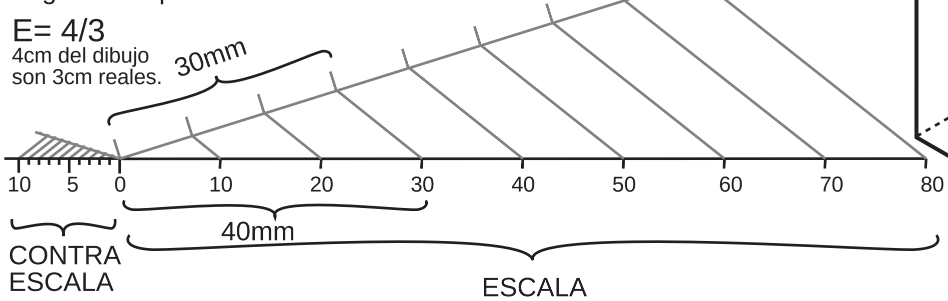
Escala Natural: 1/1 (el dibujo y el objeto real miden lo mismo). Siempre que sea posible eligiremos esta escala para el dibujo.

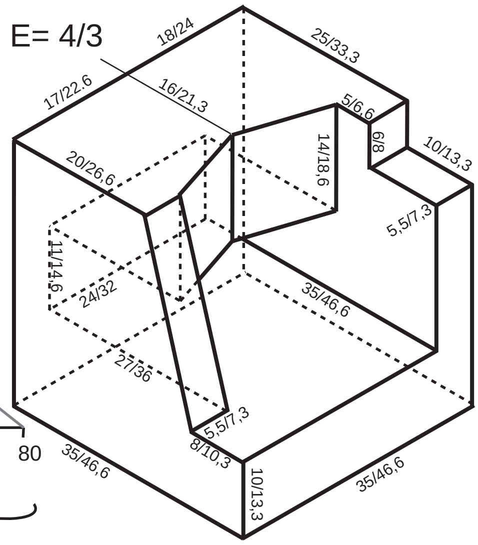
En cualquier caso la escala idonea trata siempre de encontrar una solución equilibrada donde se pueda observar con claridad cualquier detalle del dibujo. La escala elegida siempre estará condicionada por los tamaños del objeto y las dimensiones del fromato (A3 o A4 son los más estandarizados) empleado para el dibujo.

PROCEDIMIENTO GRÁFICO

Una vez determinada la escala podríamos apuntar sobre la figura del croquis o del plano las medidas que vamos a emplear para el posterior dibujo aplicando una multiplicacion y/o división. Pero este método no es realmente práctico. Sobre todo para piezas o dibujos en los que vamos a barajar gran cantidad de medidas diferentes.

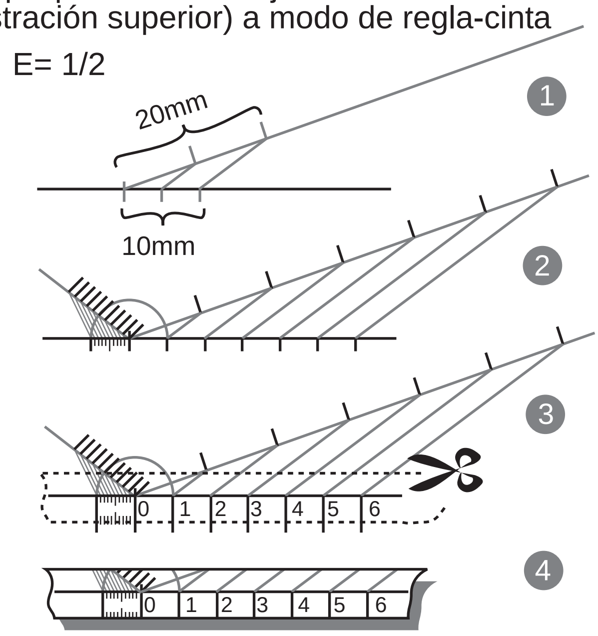
La cosntrucción de la escala nos permitirá leer directamente, en las longitudes de la escala, las magnitudes que necesitamos.





CONSTRUCCIÓN DE LA ESCALA VOLANTE

La escala volante es el método más práctico, rápido y limpio para hacer dibujos a escala. Realmente no es más que una adaptación de la escala gráfica (ilustración superior) a modo de regla-cinta métrica para copiar medidas sobre el dibujo.

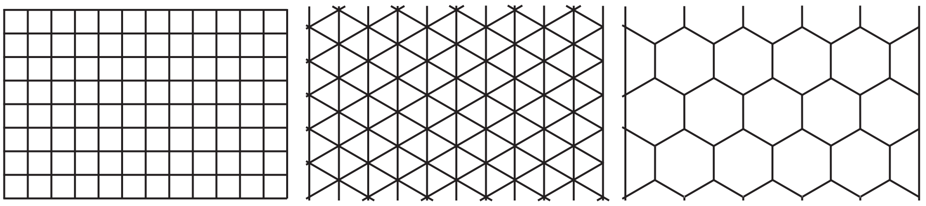


Es importante tener en cuenta y elegir correctamente las expresiones de las magnitudes (mm. cm. m. Km...) y también la medida más alta que va a aparecer en el dibujo. La contra escala tiene un papel vital para representar medidas no enteras.
Como ejemplo mostramos una escala de 1/2.

PROCEDIMIENTO:

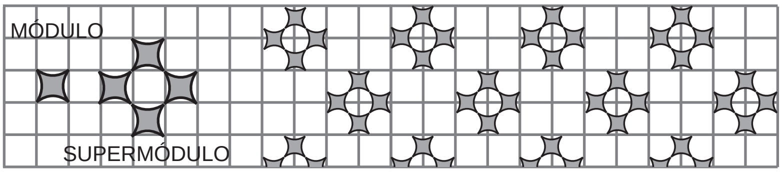
1º- Trazamos una horizontal sobre la cual medimos 1cm. Trazamos a partir del origen una oblicua sobre la que medimos 2cm. Trazamos paralelas para dividr el 1cm inical en dos.
2º- A partir de ahi repetimos tantas medidas sobre la oblicua como necesitemos y trazamos las paralelas sobre la horizontal.
3º- Llevamos sobre la oblicua al otro lado del origen la medida de la unidad y dividimos esta en diez partes para dibujar la contraescala.
4º- Marcamos las magnitudes (en este caso son centímetros), prolongamos las secciones y recortamos

Redes Modulares: Son estructuras, generalmente geometricas en las que una figura se repite para formar una composición. Estas figuras suelen ser polígonos o figuras equivalentes.
A las redes modulares compuestas por figuras que rellenan el plano sin dejar huecos se les llama **teselaciones**. Sólamente existen tres teselaciones regulares (realizadas repitiendo polígonos regulares.



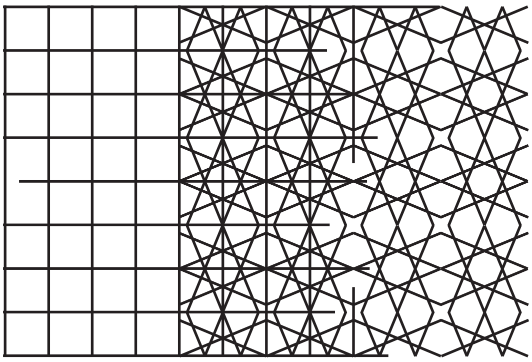
El **módulo** es la figura básica que se repite en las composiciones de las redes modulares. Como se ve en los dibujos superiores sólo hay tres polígonos regulares que teselan el plano.

El **supermódulo** es una figura compuesta por varios módulos básicos que actua como módulo también en la composición.



Los árabes fueron especialistas en desarrollar este tipo de decoración. En la cultura musulmana, debido a las doctrinas del Corán, los artistas y artesanos no deben representar figuras humanas o animales en los templos, objetos o libros religiosos. Por eso eligieron este modo de decoración, en el que no aparecen figuras reconocibles de personas o animales.

Pero la cultura Musulmana no ha sido la única que ha desarrollado la partición del plano. Matemáticos, artistas y diseñadores también se han acercado a estudiar este hecho tan interesante. **Escher** o **Vassarelly** son dos muy buenos ejemplos.



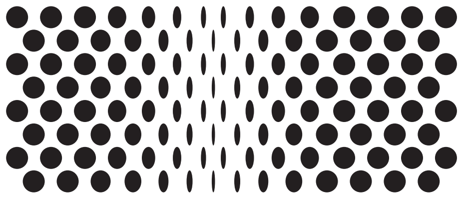
Red simple de cuadrados | Red compuesta por superposición | Red simple de Polígonos

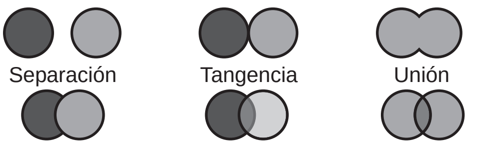
Redes modulares simples: Estan compuestas por la repetición de una sola figura

Redes modulares compuestas: Son aquellas formadas por dos o más figuras que se repiten. Cuando estas son teselaciones las figuras deben de ser polígonos que , aunque tengan distinto numero de lados, tienen los lados iguales.

Tambien existen **redes modulares** o módulos **compuestas** por **superposición** de redes o módulos simples.

La **anomalía** es un recurso plástico que consiste en alterar el orden, la posición o la forma de los módulos para atraer la atención crando efectos de movimiento, tridimensionalidad o distorsión del plano.
Bridget Riley y otros artistas del **Op art** eran expertos aplicando este recurso visual.



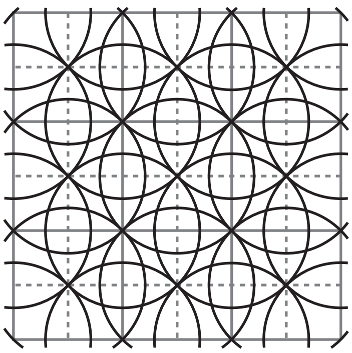


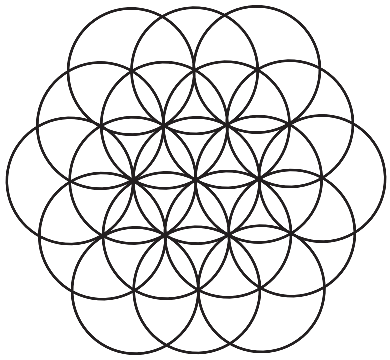
Las circunferencias son también muy comunes en la composición modular. Pero al no tener lados en sus contorno no pueden rellenar el plano en una teselación. A la izquierda vemos La smaneras en las que las circunferencias se pueden disponer para ralizar una composición con ellas como módulo.

A la derecha vemos dos formas distintas de disponer las circunferencias en el plano.

Estas dos formas eran la bases que los musulmanes empleaban para a partir de ellas, uniendo las intersecciones conseguir distintas teselaciones semiregulares.

Una **teselación semiregular** es aquella que con polígonos regulares (todos con el lado de la mima medida) rellena el plano sin dejar hueco.

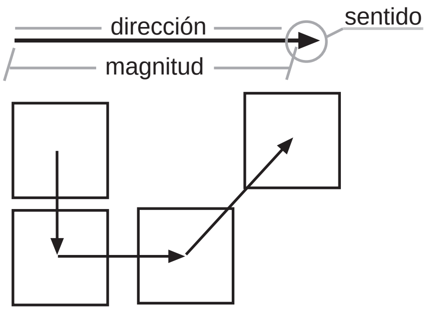


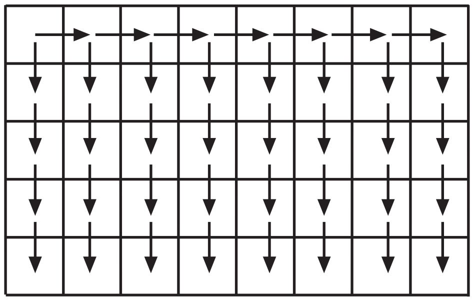


Movimientos en el plano: Geometría dinámica: ISOMETRÍAS

Un movimiento es la transformación de la posición de una figura en el plano, en este caso nuestros módulos o teselas. Concretamente, cuando aplicamos un movimiento, la tesela mantendrá su forma (sus lados, su tamaño, su área y sus ángulos serán iguales: **Isometría**) pero cambiará su situación en el plano. Existen tres tipos de Isometría:

TRASLACIÓN O DESLIZAMIENTO

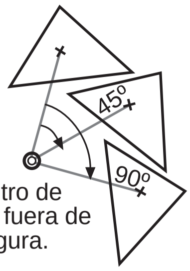




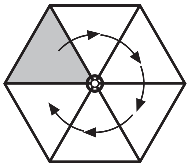
Trasladar una figura es desplazarla, empujarla. Todas las traslaciones vienen determinadas por un **vector**. Un vector está determinado por una **magnitud** (distancia), **dirección** y **sentido**

ROTACIÓN O GIRO

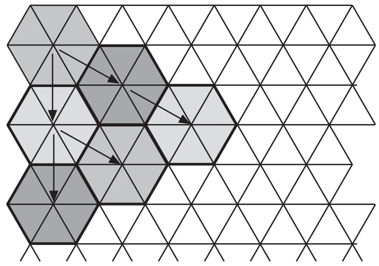
Para girar una figura se necesita un **centro de giro**, un **sentido** y una **magnitud angular**. El centro de giro se puede situar dentro,en los bordes o fuera de la figura



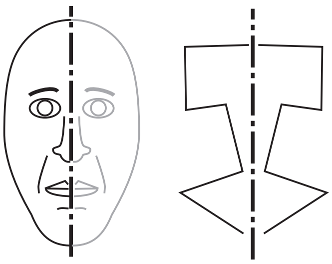
Centro de giro fuera de la figura.



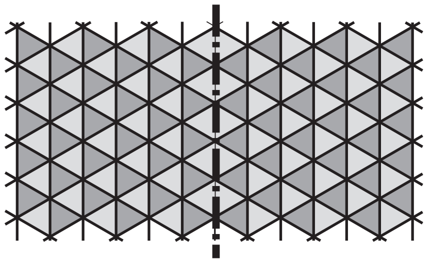
Centro de giro en un vértice, rotamos y repetimos 5 veces.



SIMETRÍA O REFLEXIÓN



La simetría es una operación o transformación geométrica que está presente en muchos objetos naturales y creados por el hombre. Consiste en reflejar la figura con respecto a un eje de simetría. Todos los puntos simétricos se encuentran en una perpendicular al eje , al otro lado y a la misma distancia.

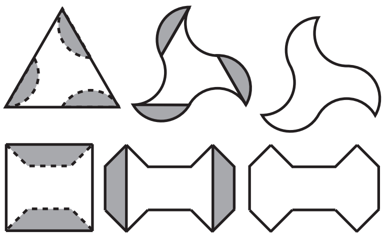


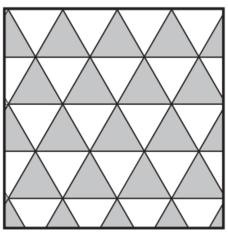
Transformaciones del módulo en teselaciones: EQUIVALENCIAS

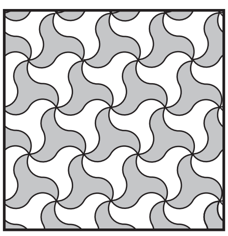
Ya hemos visto que existen tres teselaciones regulares (triángulos, cuadrados y hexágonos) y semiregulares (existen ocho), en las que aparece más de un polígono regular. También podemos encontrarnos con multitud de teselaciones cuyos módulos son polígonos iregulares y repetidos pueden rellenar el plano (triángulos irregulares, rombos o rectangulos por ejemplo).

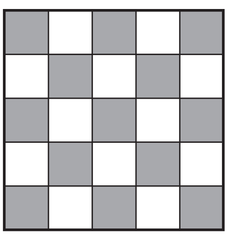
Existe la posibilidad de alterar la forma del módulo (principalmente en teselaciones que únicamente emplean una tesela, figura o módulo) de modo que la forma alterada rellene el plano de igual modo. Se trata de emplear una figura equivalente.

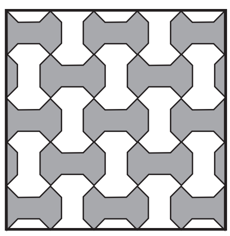
La **equivalencia** es una relación entre figuras (cualquier figura plana) en la que el original y la figura equivalente tienen la misma area o superficie.











Como podemos ver en las ilustraciones arriba hemos obtenido una figura equivalente del triángulo (llamada pajarita nazarí) y otra figura equivalente del cuadrado (hueso nazarí). Hemos conseguido las nuevas figuras recortando y pegando los recortes en distinto lugar.

Estos recortes siguen las leyes de las isometrías (traslación, giro y simetrías). Existen diversos procedimientos o métodos para obtener figuras equivalentes, aplicando isometrías, que también teselan el plano como las figuras originales. Los árabes y M.C. Escher fueron expertos en este tema.