

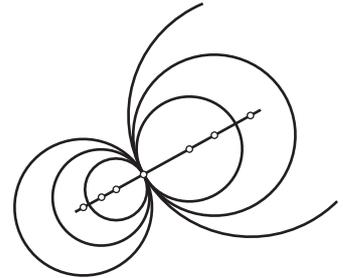
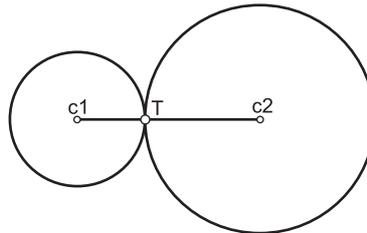
Las Tangencias

Dos elementos son tangentes cuando tienen un punto en común denominado punto de tangencia. Estos elementos son circunferencias (o arcos de circunferencia, en algunos casos curvas conicas también) y rectas.

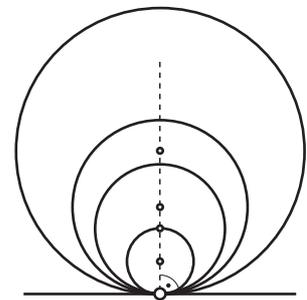
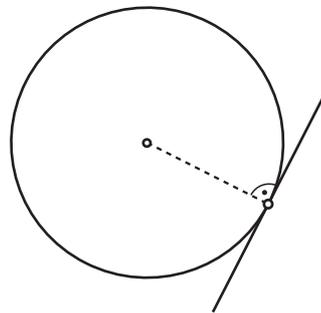
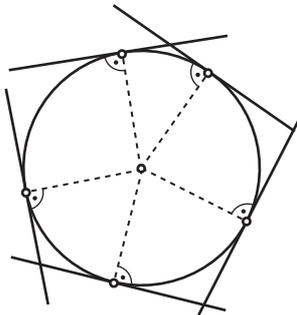
Un enlace es la unión armónica de curvas con curvas o curvas con rectas. Los enlaces son la aplicación práctica de las tangencias.

Propiedades fundamentales de las tangencias

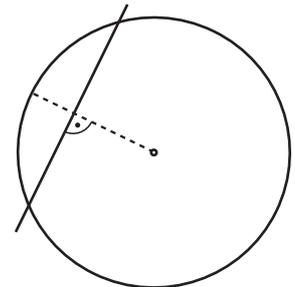
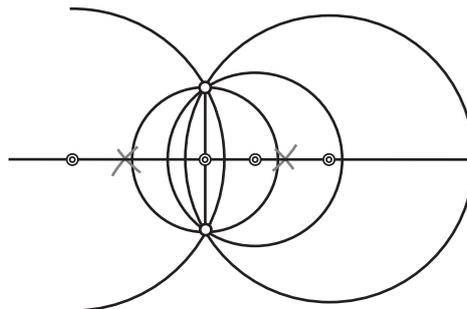
- 1- Los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.



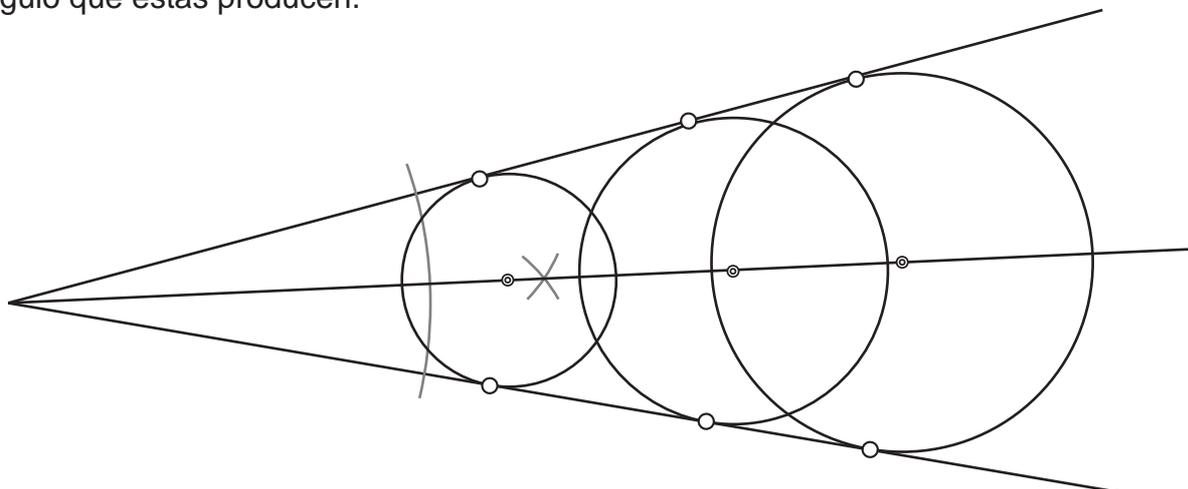
- 2- Una recta tangente a una circunferencia es siempre perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.



- 3- El centro de cualquier circunferencia que pasa por dos puntos se encuentra en la mediatriz del segmento que definen los dos puntos. Todo radio perpendicular a una cuerda de circunferencia divide a esta en dos mitades iguales.



- 4- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que estas producen.



Tangencias: Teoremas fundamentales y lugares geométricos

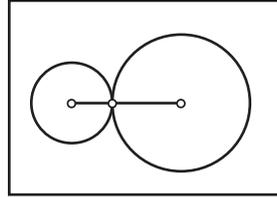
Conociendo los cuatro teoremas fundamentales de las tangencias aun no sabemos lo suficiente para resolver problemas básicos de tangencias.

Es necesario conocer el concepto de LUGAR GEOMÉTRICO. Y hacer uso de al menos dos tipos de lugares geométricos.

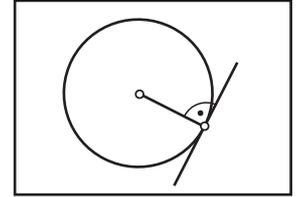
Un LUGAR GEOMETRICO es un conjunto de puntos en el plano que cumplen unas circunstancias, características o propiedades comunes respecto a un elemento geométrico (puede ser un plano, una circunferencia, un segmento, un ángulo, etc)

Para resolver problemas básicos de tangencias tenemos que tener claros dos lugares geométricos: Las rectas paralelas y las circunferencias concéntricas.

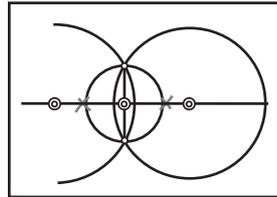
1º Centros alineados con el punto de tangencia



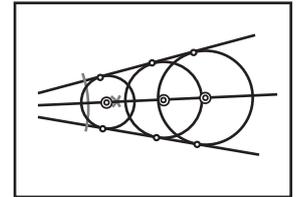
2º Radio perpendicular a recta tg. por el punto de tg.



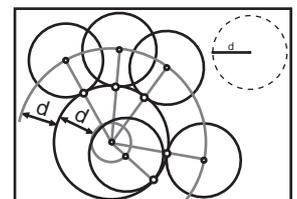
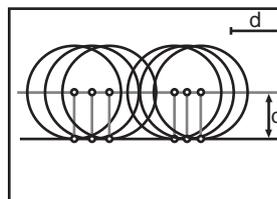
3º Centros de cir. que pasan por dos pts. en mediatriz



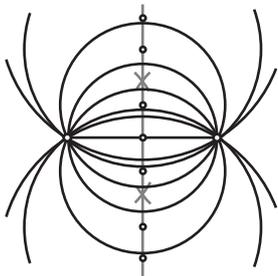
4º Centros de cir. tg. a dos rectas. en bisectriz



Lugares Geométricos: PARALELAS Y CIR. CONCÉNTRICAS



DEFINICIONES DE ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS IMPORTANTES PARA TANGENCIAS



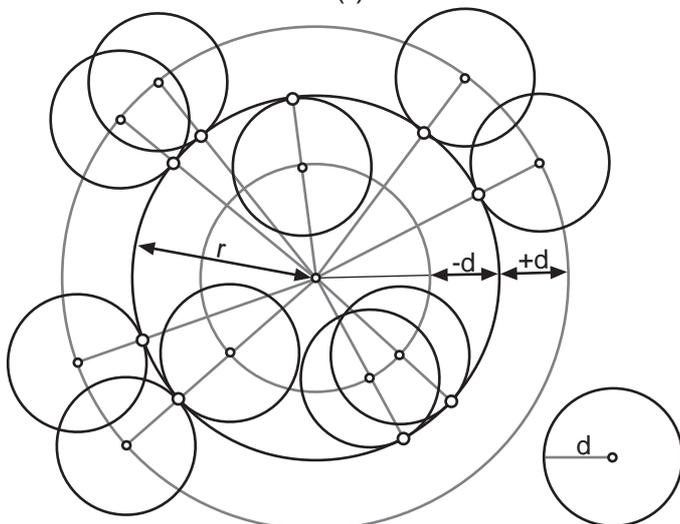
MEDIATRIZ: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos. Una mediatriz contiene los centros de TODAS las circunferencias que pasan por los extremos del segmento. Cuanto más se aleje el centro del punto medio del segmento más amplio será el radio.

BISECTRIZ: Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas. Presente en las propiedades fundamentales de las tangencias. La bisectriz de un ángulo contiene a todos los centros de circunferencias tangentes a los lados. Cuanto más alejado esté el centro del vértice del ángulo más amplitud tendrá el radio de la circunferencia tangente.

EJE RADICAL: El es lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencia de igual radio tangentes a otras dos.

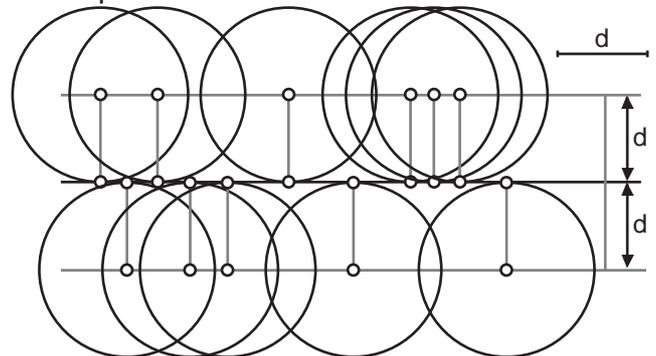
CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

Una cir. concéntrica de radio $(r+d)$ a otra de radio (r) es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias TANGENTES EXTERIORES de radio (d) a la circunferencia de radio (r) .



PARALELAS A UNA DISTANCIA

Una recta paralela a una distancia (d) es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencias de radio (d) tangentes a una recta que se encuentra a la distancia (d) de su paralela.

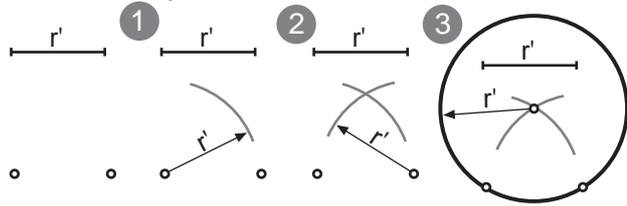


Una cir. concéntrica de radio $(r-d)$ a otra de radio (r) es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias TANGENTES INTERIORES de radio (d) a la circunferencia de radio (r) .

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TANGENCIAS

Las soluciones a los problemas de tangencias son rectas y circunferencias tangentes a otras rectas y/o circunferencias. Pero la base de las soluciones y un requisito importante en estas es situar correctamente LOS PUNTOS DE TANGENCIA Y LOS CENTROS (si la solución es una circunferencia).

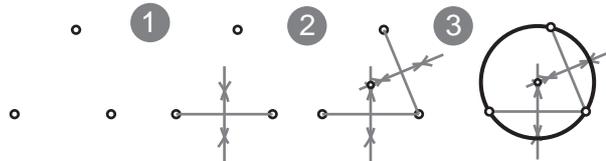
Dados dos puntos, trazar la circunferencia que pasa por estos con un radio r'



- 1º- Trazamos un arco con radio r' con centro en el primer punto (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, cir. concéntricas).
- 2º- Trazamos otro arco con radio r' con centro en el segundo punto (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, cir. concéntricas).
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

EL CENTRO DE LAS SOLUCIONES SIEMPRE SE ENCONTRARÁ EN LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO QUE PASA POR DOS PUNTOS. PARA ESTE PROBLEMA ENCONTRAMOS OTRA SOLUCIÓN EN EL LADO OPUESTO DEL SEGMENTO.

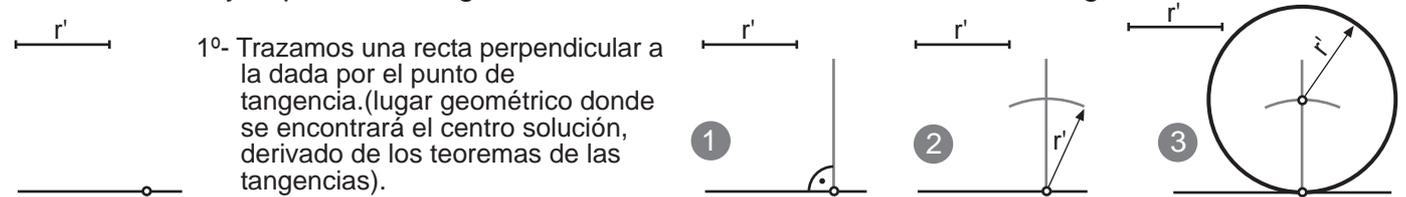
Dados tres puntos, trazar la circunferencia que pasa por estos.



- 1º- Unimos dos puntos y trazamos su mediatriz.
- 2º- Unimos el otro punto con cualquiera de los anteriores y trazamos la mediatriz del segundo segmento.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

LA MEDIATRIZ DEL SEGMENTO QUE PASA POR DOS PUNTOS CONTIENE TODOS LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR ESOS DOS PUNTOS. EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS MEDIATRICES DE DOS SEGMENTOS PRODUCIDOS POR TRES PUNTOS ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR LOS TRES PUNTOS. CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Dada una recta y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencia tangente con un radio r'

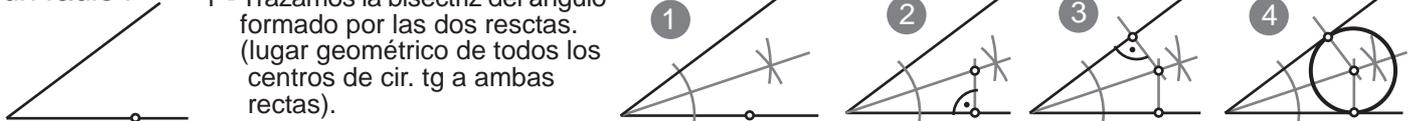


- 1º- Trazamos una recta perpendicular a la dada por el punto de tangencia. (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).

2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio r' que corta a la perpendicular. (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica).

3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

Dadas dos rectas y el punto de tangencia sobre una de ellas, trazar la circunferencia tangente con un radio r



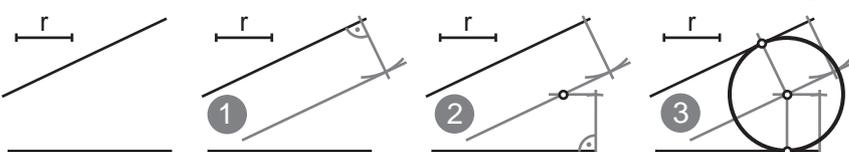
- 1º- Trazamos la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas. (lugar geométrico de todos los centros de cir. tg a ambas rectas).

2º- Trazamos una perpendicular a la recta que contiene el pto. de tg. pasando por este. (Lugar geométrico de todos los centros de cir. que son tangentes por ese punto a la recta).

3º- La intersección de la bisectriz con la perpendicular es el centro buscado. (Coincidencia de dos lugares geométricos). Desde ese centro trazamos una perpendicular a la otra recta que nos da el otro pto. de tg.

4º- Trazamos la cir. buscada.

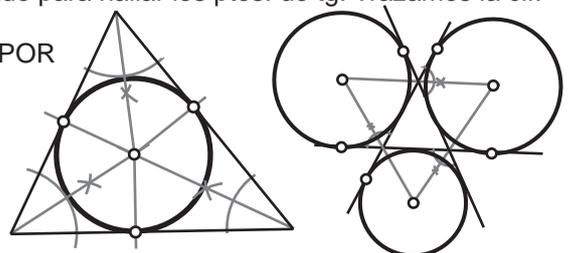
Dadas dos rectas, trazar la circunferencia de radio r tangente a ambas.



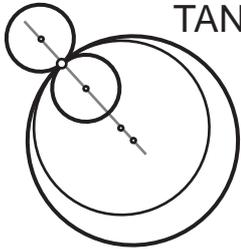
- 1º- Trazamos una paralela a una distancia r de una recta.
- 2º- Hacemos lo mismo con la otra recta. Donde las paralelas se cortan es el centro de la solución.

3º- Desde el centro trazamos perpendiculares a las rectas del enunciado para hallar los pto. de tg. Trazamos la cir.

LA BISECTRIZ DE UN SEGMENTO DE UN ÁNGULO PRODUCIDO POR DOS RECTAS CONTIENE TODOS LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A ELLAS. EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS BISECTRICES DE DOS ÁNGULOS PRODUCIDOS POR TRES RECTAS ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A LAS TRES. INCENTRO DE UN TRIÁNGULO.



TANGENCIAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS: PRINCIPIOS.

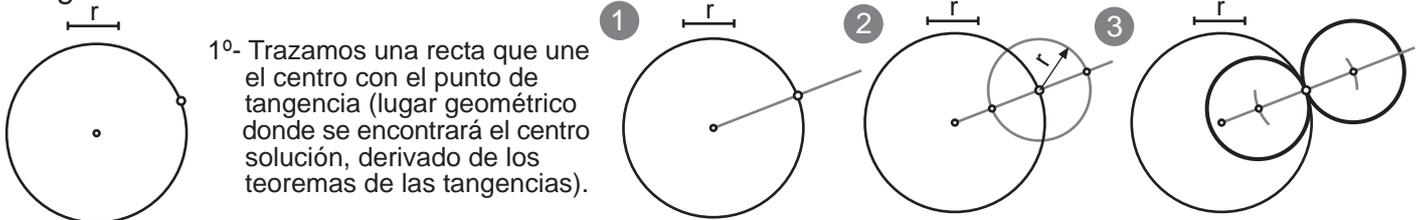


Nos pueden pedir tres tipos de circunferencias tangentes a una dada .

- 1- Las tangentes interiores que se encuentran contenidas por la circunferencia dada, con la cual comparten el punto de tangencia. Obviamente estas tendrán que tener un radio menor a la dada para poder ser contenidas sin ser secantes.
- 2- Las tangentes exteriores que se encuentran fuera de la circunferencia dada.
- 3- Las circunferencias tangentes que contienen a la dada. Estas tendrán que tener un radio mayor a la circunferencia dada.

EN CUALQUIER CASO LOS CENTROS DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES SIEMPRE ESTÁN ALINEADOS CON EL PUNTO DE TANGENCIA.

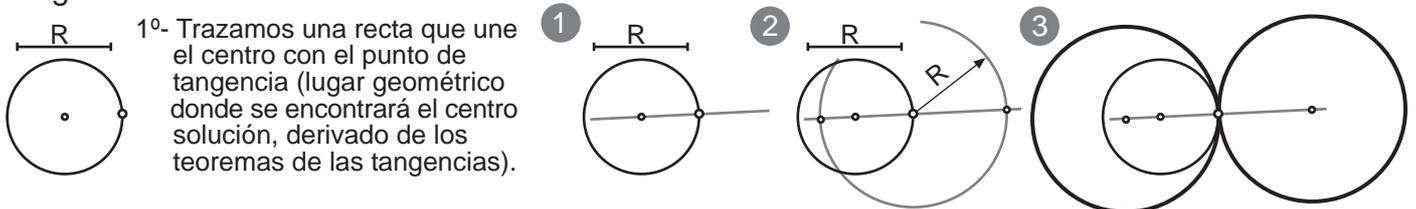
Dada una circunferencia de radio R y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencias tangentes con un radio r



1º- Trazamos una recta que une el centro con el punto de tangencia (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).

- 2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio r (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica) que corta a la recta en dos puntos, los cuales serán los centros de las soluciones.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

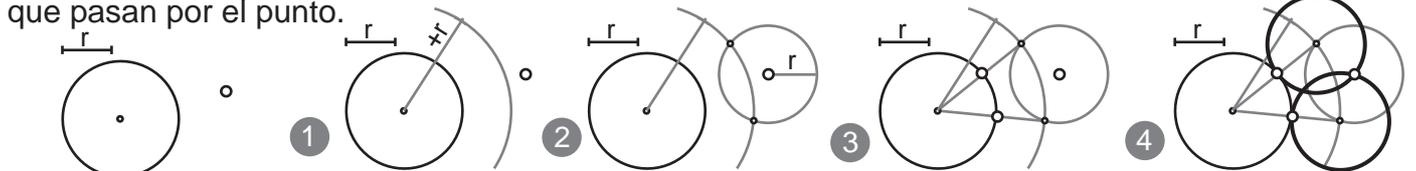
Dada una circunferencia de radio r y el punto de tangencia sobre ella, trazar la circunferencias tangentes con un radio R .



1º- Trazamos una recta que une el centro con el punto de tangencia (lugar geométrico donde se encontrará el centro solución, derivado de los teoremas de las tangencias).

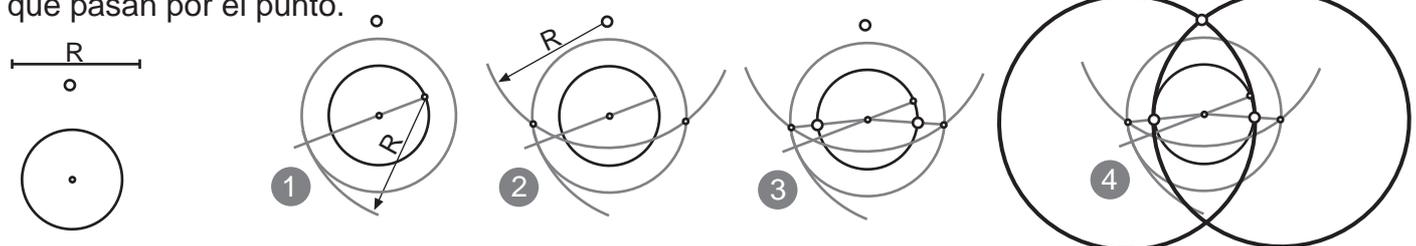
- 2º- Con centro en el punto de tangencia trazamos un arco de radio R (lugar geométrico donde se encontrará la solución, circunferencia concéntrica) que corta a la recta en dos puntos, los cuales serán los centros de las soluciones.
- 3º- En el punto de intersección se encuentra la solución. Trazamos la circunferencia.

Dada una circunferencia de radio R y un punto exterior a ella, trazar las cir. tangentes de radio r que pasan por el punto.



- 1º- Trazamos un radio arbitrario y a partir del punto de intersección con la circunferencia copiamos (r), trazamos un arco concéntrico a la circunferencia de radio ($+r$).
- 2º- Con centro en el punto dado trazamos una circunferencia de radio (r). Los puntos de intersección con el arco anterior son los centros de la solución (coincidencia de dos lugares geométricos).
- 3º- Unimos los centros hallados con el centro de la circunferencia dada para hallar los puntos de tangencia.
- 4º- Trazamos las circunferencias buscadas.

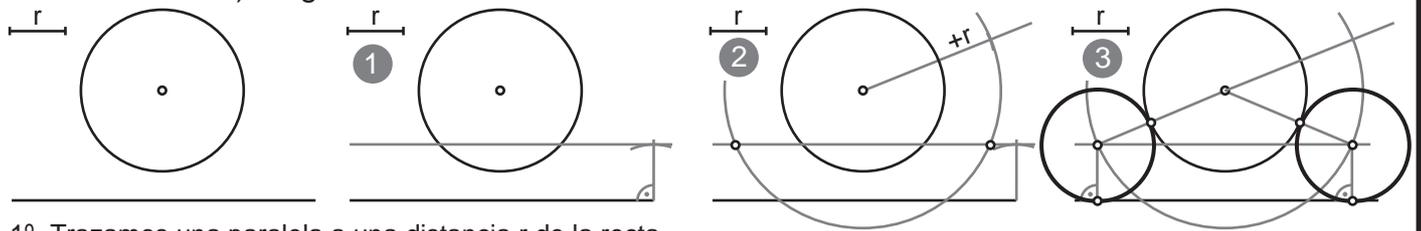
Dada una circunferencia de radio r y un punto exterior a ella, trazar las cir. tangentes de radio R que pasan por el punto.



- 1º- Trazamos un diámetro arbitrario y a partir del punto de intersección con la circunferencia copiamos (R) sobre la totalidad del diámetro), trazamos un arco concéntrico a la circunferencia de radio.
- 2º- Con centro en el punto dado trazamos una circunferencia de radio (R). Los puntos de intersección con la circunferencia anterior son los centros de la solución (coincidencia de dos lugares geométricos).
- 3º- Unimos los centros hallados con el centro de la circunferencia dada para hallar los puntos de tangencia.
- 4º- Trazamos las circunferencias buscadas.

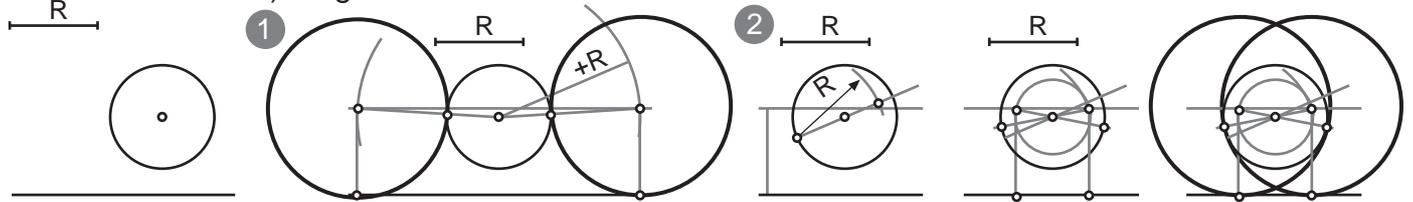
TANGENCIAS DADOS DOS ELEMENTOS (rectas o circunferencias) y el radio de la circunferencia solución.

Dada una recta y una circunferencia de radio R , trazar la circunferencia de radio r (menor al radio de la dada) tangente a ambas.



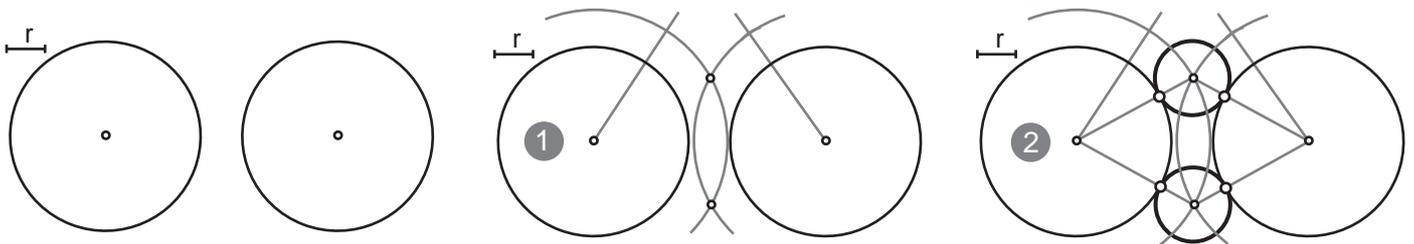
- 1º. Trazamos una paralela a una distancia r de la recta.
- 2º. Trazamos un arco concéntrico a la dada de radio $(+r)$. Conseguimos esto trazando un radio arbitrario y a partir del punto de corte con la circunferencia transportar la medida (r) . Los puntos de intersección con la recta paralela serán los centros de las circunferencias soluciones. (coincidencia de sus lugares geométricos)
- 3º. Hallamos los puntos de tangencia: a partir de los centros perpendiculares a las rectas y segmentos con el otro extremo en la circunferencia de la dada. Trazamos las circunferencias que solucionan el problema.

Dada una recta y una circunferencia de radio r , trazar las circunferencias de radio R (mayor al radio de la dada) tangente a ambas.



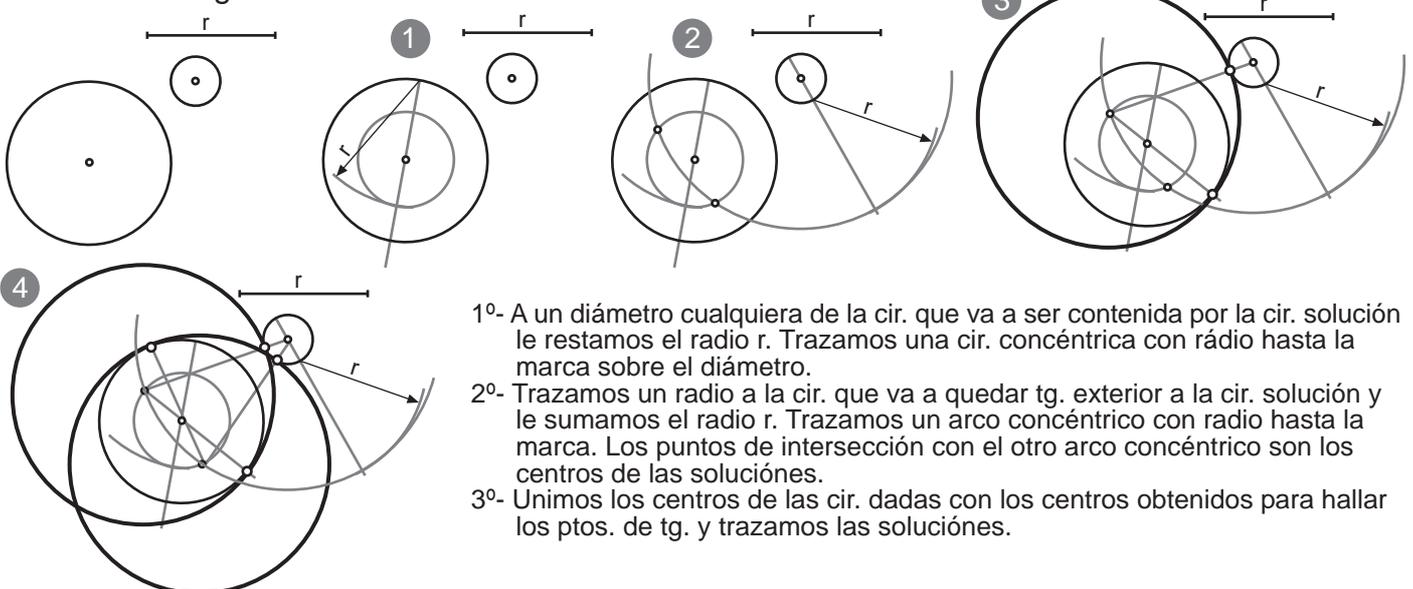
- 1º. Procederemos del mismo modo que en el problema anterior para hallar las mismas soluciones. Tg exteriores.
- 2º. Situaremos la medida de R sobre el diámetro a partir de un extremo para encontrar los centros de las cir. tg que contienen a la dada. Unimos los centros solución con el dado para hallar pts. de tg y desde estos trazamos perpendiculares a las rectas para hallar pts. de tg. sobre la recta. Trazamos las cir. solución que contienen a la dada.

Dadas dos circunferencias trazar las circunferencias de radio dado r tangentes exteriores a ambas.



- 1º. Sumamos a los radios de ambas circunferencias r y trazamos dos arcos concéntricos que se cortan en dos pts que serán los centros de las soluciones.
- 2º. Unimos los centros de la solución con los dados y obtenemos los pts. de tg. Trazamos las cir. solución.

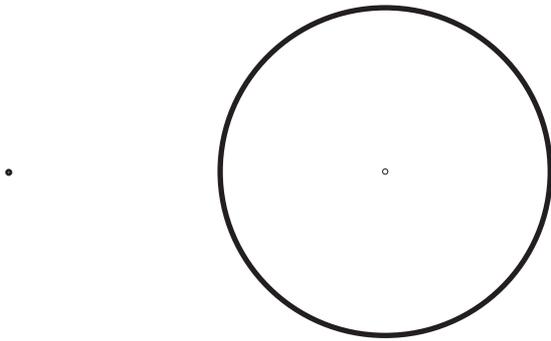
Dadas dos circunferencias trazar la circunferencia de radio dado r tangente a ambas quedando la circunferencia grande del enunciado dentro de la solución.



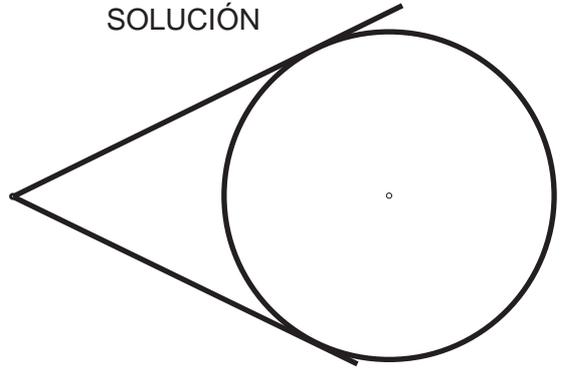
- 1º. A un diámetro cualquiera de la cir. que va a ser contenida por la cir. solución le restamos el radio r . Trazamos una cir. concéntrica con radio hasta la marca sobre el diámetro.
- 2º. Trazamos un radio a la cir. que va a quedar tg. exterior a la cir. solución y le sumamos el radio r . Trazamos un arco concéntrico con radio hasta la marca. Los puntos de intersección con el otro arco concéntrico son los centros de las soluciones.
- 3º. Unimos los centros de las cir. dadas con los centros obtenidos para hallar los pts. de tg. y trazamos las soluciones.

En el enunciado se presenta una circunferencia con su centro y un punto exterior a ella. Se piden las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto exterior

ENUNCIADO



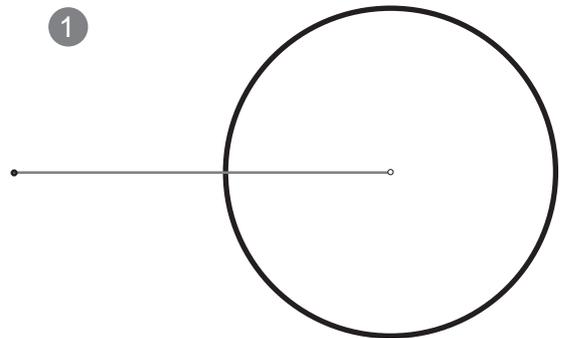
SOLUCIÓN



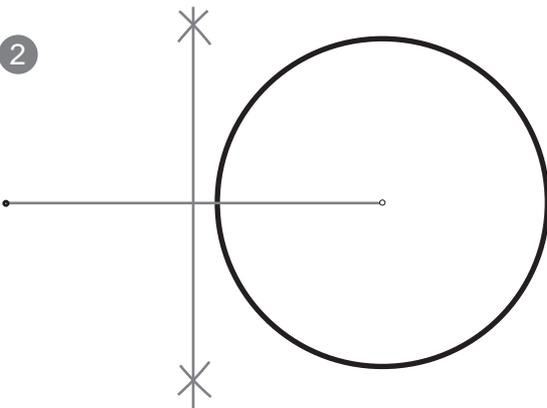
Para resolverlo necesitamos trazar ciertos trazados auxiliares que se pueden explicar cuatro pasos

- 1º- Unimos el centro de la circunferencia con el punto exterior a ella trazando un segmento.
- 2º- Trazamos la mediatriz del segmento obteniendo el punto medio de este.
- 3º- Con centro en el punto medio y radio hasta el punto exterior o el centro (lo cual es lo mismo), trazamos una circunferencia que corta a la dada en dos puntos, los Puntos de tangencia.
- 4º Trazamos radios hasta los puntos de tangencia
- 5º Desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia trazamos las rectas que son solución

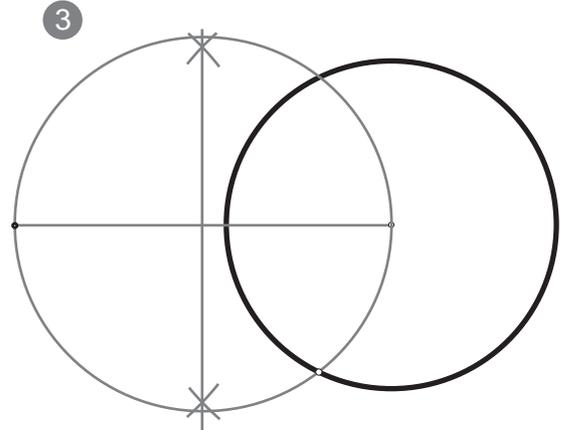
1



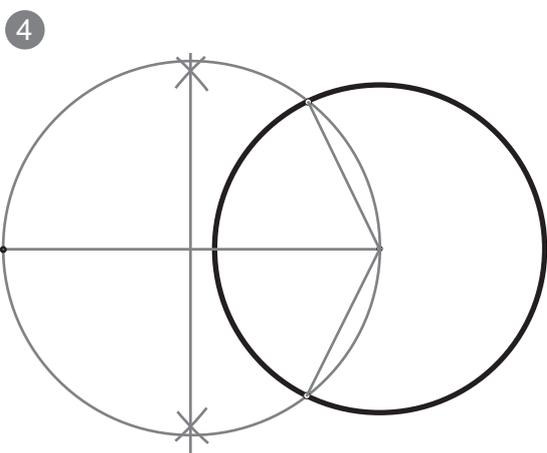
2



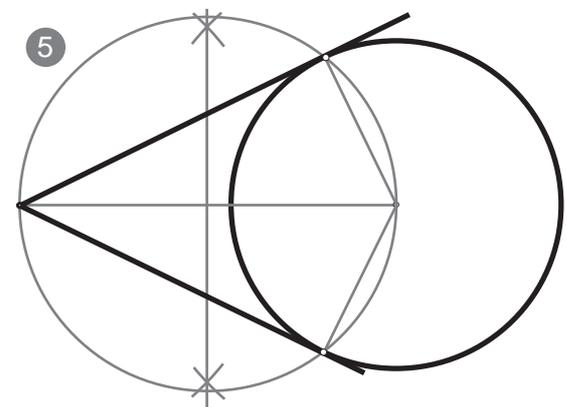
3



4

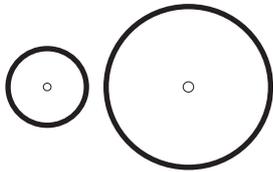


5

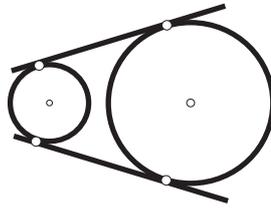


Tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias

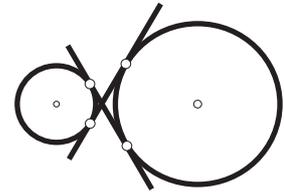
ENUNCIADO



SOLUCIÓN tangentes exteriores



SOLUCIÓN tangentes interiores

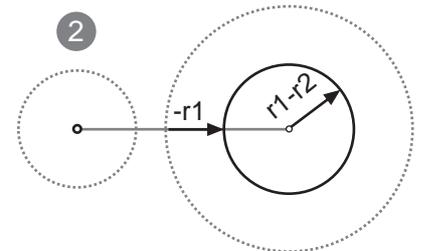
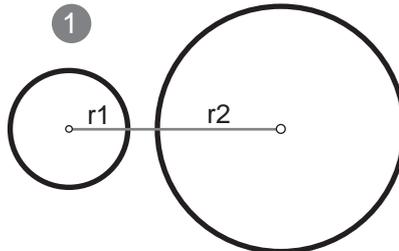


Para resolver estos dos problemas necesitamos reducirlos al problema pto-circunferencia. tendremos que hacer el esfuerzo de "olvidarnos" (ignorar visualmente) el enunciado original y resolver el problema pto-circunferencia. una vez conseguido el resultado del problema original no trae mas dificultad que llevar las rectas y los radios a su sitio trazando paralelas con escuadra y cartabón

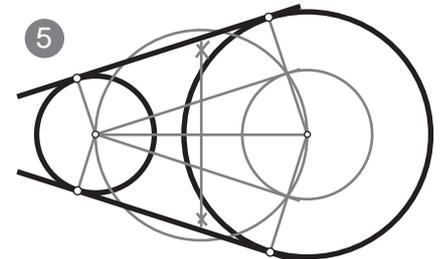
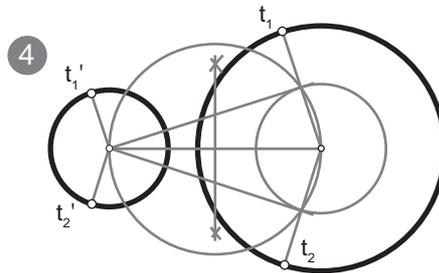
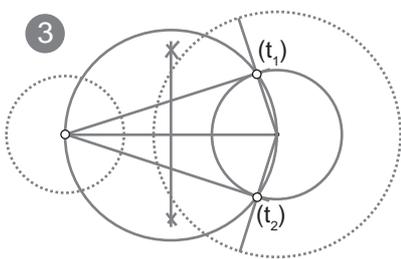
Tangentes exteriores a dos circunferencias

- 1º Trazamos el segmento que une los dos centros
- 2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le restamos el radio de la circunferencia pequeña.

DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA



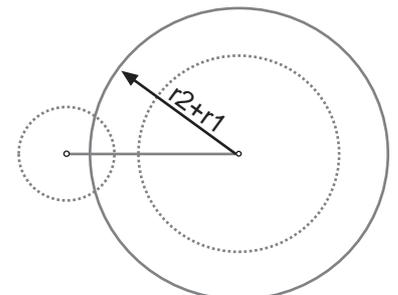
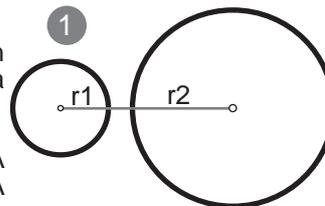
- 3º- Resolvemos el problema reducido, trazamos los radios que van a (t1) y (t2) lo suficientemente largos para que corten a la circunferencia grande original.
- 4º- A partir del centro de la circunferencia pequeña original trazamos radios con la misma inclinación (escuadra y cartabón). Así, con los cuatro radios obtenemos t1 y t2 sobre la grande y t1' y t2' sobre la pequeña
- 5º- Unimos t1 con t1' y t2 con t2'



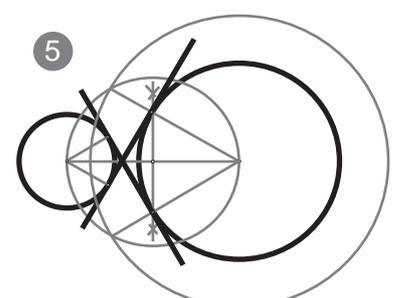
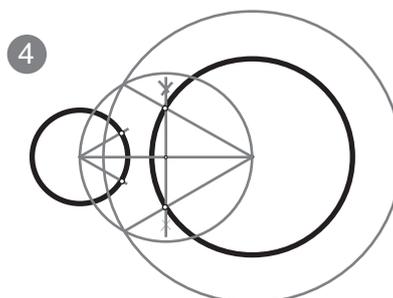
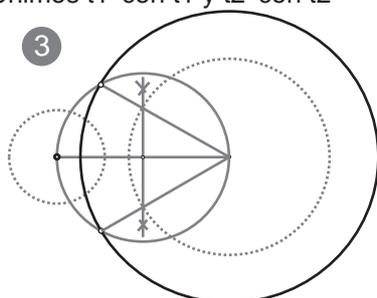
Tangentes interiores a dos circunferencias

- 1º Trazamos el segmento que une los dos centros
- 2º Sobre el segmento, a la circunferencia grande, con el compás, le sumamos el radio de la circunferencia pequeña.

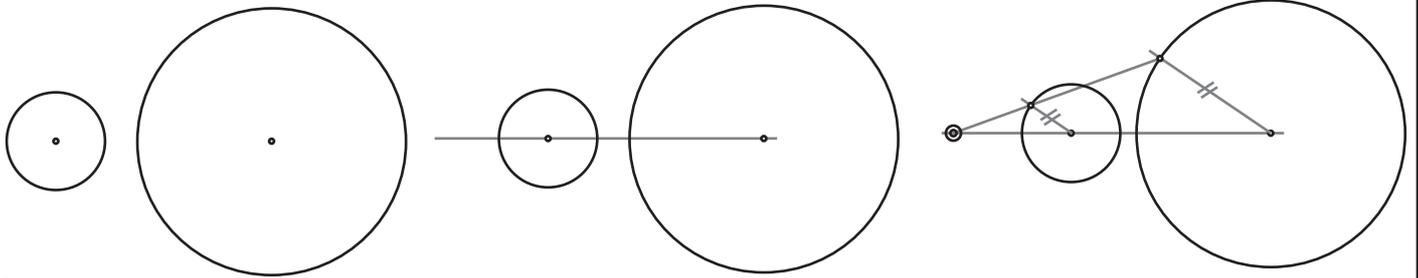
DE ESTE MODO HEMOS REDUCIDO EL PROBLEMA A RECTAS TANGENTES PUNTO-CIRCUNFERENCIA



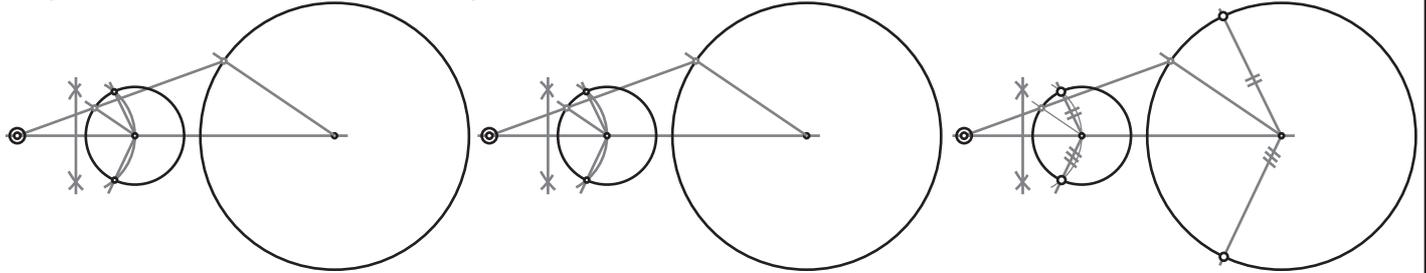
- 3º- Resolvemos el problema reducido, obteniendo así (t1) y (t2), pero esta vez no trazamos las rectas tangentes para no contaminar con demasiadas líneas el dibujo.
- 4º- Trazamos radios paralelos a los de la circunferencia grande en la circunferencia pequeña, pero invirtiendo su posición (el radio de arriba en la grande, abajo en la pequeña y viceversa). Los puntos de tangencia del problema original se encuentran en las intersecciones de los radios.
- 5º- Unimos t1' con t1 y t2' con t2



Dadas dos circunferencias y sus centros, trazar las tangentes exteriores empleando las propiedades de la homotecia.

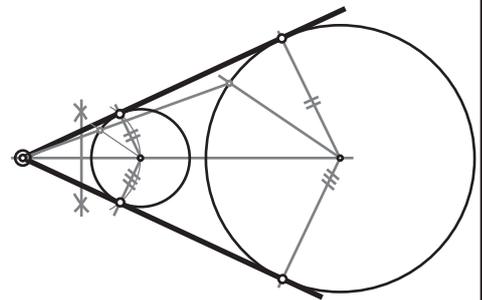


- 1º- Trazamos una recta que une los centros de las dos circunferencias.
- 2º- Trazamos dos radios paralelos a las circunferencias y unimos los dos puntos de intersección con las circunferencias para DETERMINAR sobre la recta que une los centros de las circunferencias el CENTRO DE HOMOTECIA directa

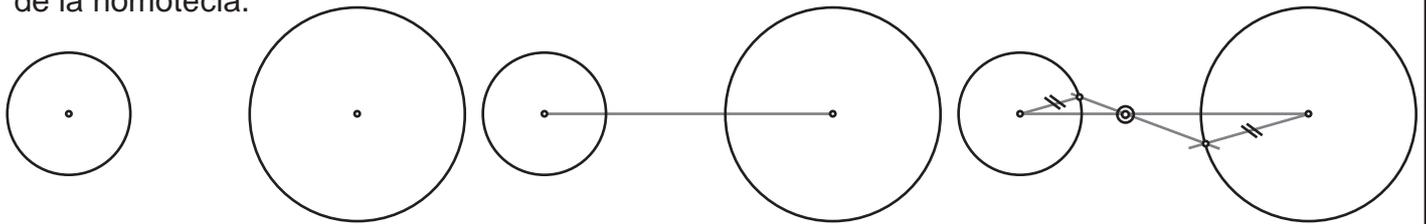


- 3º- Hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia más próxima al centro de homotecia que pasan por este. No las dibujamos todavía, sólo los radios que van a los puntos de tangencia.
- 4º- En la circunferencia mayor trazamos radios paralelos (homotéticos) a los hallados en el paso anterior y determinamos los puntos de tangencia.
- 5º- Las rectas tangentes exteriores deben de pasar por los puntos de tangencia dos a dos y por el centro de homotecia, las trazamos.

HEMOS ENCONTRADO EL CENTRO DE HOMOTECIA DIRECTA, HALLADO LOS PUNTOS DE TANGENCIA CON UNA CIR. Y ENCONTRADO SUS HOMOTÉTICOS EN LA SEGUNDA PARA RESOLVER EL PROBLEMA.

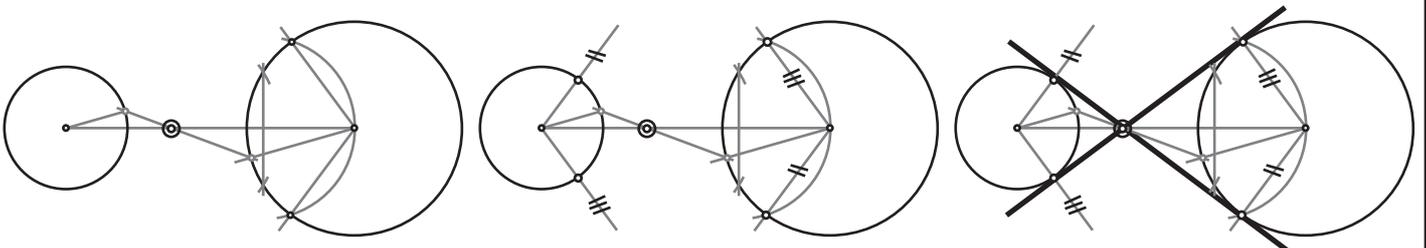


Dadas dos circunferencias y sus centros, trazar las tangentes interiores empleando las propiedades de la homotecia.



BUSCAMOS EL CENTRO DE HOMOTECIA INDIRECTA:

- 1º- Unimos los centros de las circunferencias. Sobre este segmento se encontrará el centro de homotecia.
- 2º- Trazamos dos radios paralelos a las circunferencias pero en lados opuestos de la recta que une los centros. Obtenemos dos puntos de intersección, uno en sobre cada circunferencia. Los unimos y el punto de intersección de este segmento con el que une los dos centros de la circunferencia es el CENTRO DE HOMOTECIA INVERSA.



- 3º- Hallamos los puntos de tangencia de las rectas tangentes que pasan por el centro de homotecia a una de las circunferencias (hemos usado la más grande por claridad). No trazamos las tangentes pero sí sus radios.
- 2º- Trazamos radios paralelos a los últimos en la otra circunferencia pero invirtiendo el lado de la recta que une los centros al que se encuentran. Así obtenemos los puntos de tangencia en la otra circunferencia.
- 5º- Unimos los puntos de tangencia para obtener las rectas tangentes, estas tienen que cortarse en el centro de homotecia.