SISTEMA AXONOMÉTRICO

TEMA 14

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe tomar idea clara de la forma de proyectar los cuerpos. Se centrará el estudio en el sistema isométrico, fijando la escala isométrica. Se estudiarán las representaciones del punto, de la recta y del plano en posiciones sencillas y los problemas de intersección de planos y de recta con plano

Está demostrado que se puede enseñar a un alumno a hacer perspectivas isométricas con una explicación no superior a dos horas, incluso para cuerpos con circunferencias y caras oblicuas. Según esto, el alumno aprenderá la forma más rápida de obtener las elipses que son proyecciones de circunferencias situadas en planos paralelos a los del triedro. Estas elipses se determinarán, fundamentalmente, por la pareja de diámetros conjugados paralelos a los ejes y se indicará la dirección que tendrían los ejes de las mismas.

Finalmente, y ya como actividades, se representarán cuerpos geométricos y piezas didácticas sencillas en perspectiva isométrica. Para adquirir precisión, algunos ejercicios se harán con instrumentos pero fundamentalmente se deben hacer con el lápiz a mano alzada.

Esta unidad temática, si el profesor sigue la metodología adecuada, podrá llevarla a buen fin a lo largo de cuatro o cinco clases, como máximo.

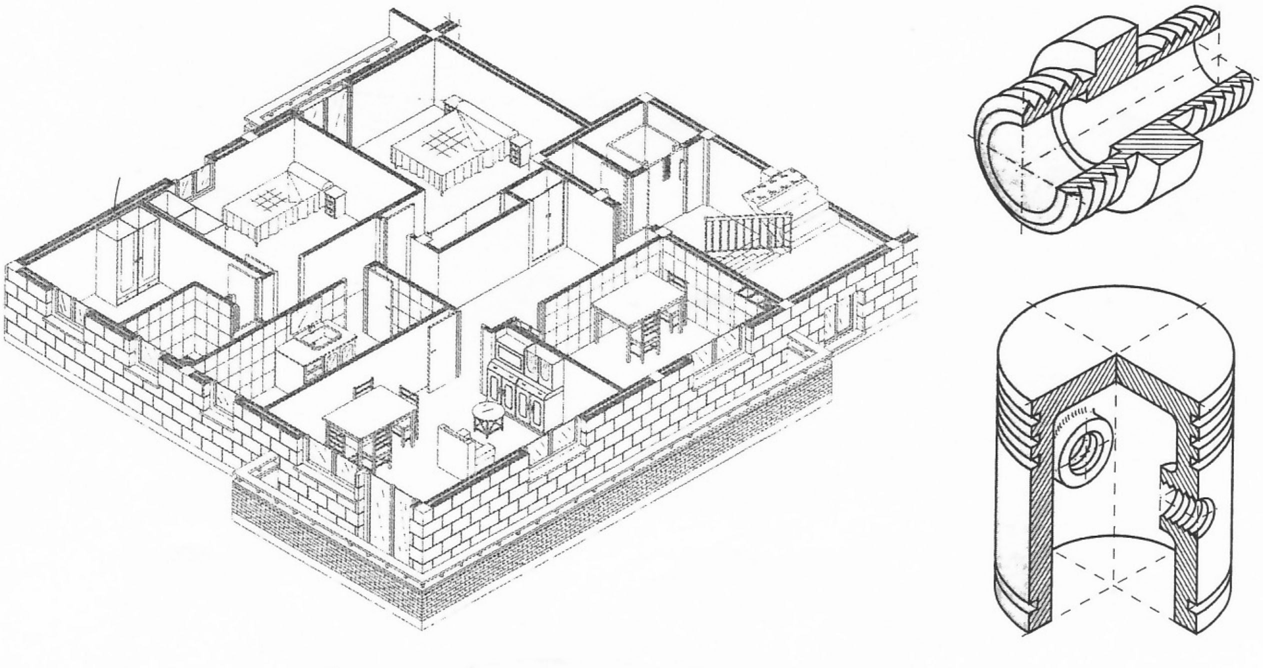


Fig. 1. Representaciones en perspectiva axonométrica.

1. Fundamentos del sistema axonométrico ortogonal

Consideremos en el espacio un triedro trirrectángulo cuyos planos vamos a nombrar por las letras *(X)(O)(Y)*, *(Z)(O)(X)* y *(Z)(O)(Y)* (**Fig. 2**), siendo el punto *(O)*, vértice del triedro, **el origen del sistema**

Las aristas *(X)*, *(Y)* y *(Z)* del triedro se llaman **ejes del sistema**.

Los planos *(X)(O)(Y)*, *(X)(O)(Z)* y *(Z)(O)(Y)* de las caras del triedro se llaman **planos coordenados**

Consideremos un punto cualquiera *(P)* del espacio y proyectémoslo ortogonalmente sobre cada una de las caras del triedro; la proyección sobre el plano *(X)(O)(Y)* es *(P')*, sobre el plano *(X)(O)(Z)* es *(P'')* y sobre el plano *(Z)(O)(Y)* se proyecta en *(P''')*.

Imaginemos un cuarto plano que puede ser cualquiera con tal de que no contenga a un eje o que no sea una cara del triedro; el plano citado, que cortará por lo tanto a los tres ejes, es el que vamos a considerar como **plano del papel** o **plano del dibujo**, llamado también **plano de proyección** y más generalmente **plano del cuadro**.

Proyectemos ortogonalmente sobre el plano del cuadro elegido el conjunto que tenemos en el espacio y veremos que el origen *(O)* proyecta en el punto *O*; los ejes se proyectan según tres rectas *X*, *Y* y *Z* concurrentes en *O* y los puntos *(P)*, *(P')*, *(P'')* y *(P''')* lo hacen en *P*, *P'*, *P''* y *P'''*.

Obsérvese que las rectas $\overline{(P)\text{-}(P')}$, $\overline{(P)\text{-}(P'')}$ y $\overline{(P)\text{-}(P''')}$ son paralelas a los ejes *(Z)*, *(Y)* y *(X)* y se proyectan paralelamente a los ejes *Z*, *Y* y *X* respectivamente; el paralelepípedo que se forma en el espacio y dibujado claramente en la figura se proyecta como puede apreciarse fácilmente.

Las rectas $\overline{P\text{-}P'''}$, $\overline{P'\text{-}M}$ y $\overline{P''\text{-}N}$ son paralelas al eje *X*; las rectas $\overline{P'\text{-}L}$, $\overline{P\text{-}P''}$ y $\overline{P'''\text{-}N}$ son paralelas al eje *Y* y las rectas *P-P'*, *P'''-M* y *P''-L* son paralelas al eje *Z*.

Los ejes, ya en proyección, forman unos ángulos entre sí que se han designado por las letras ε, ω y ρ; $\hat{\varepsilon} = \widehat{XOY}$, $\hat{\omega} = \widehat{XOZ}$, $\hat{\rho} = \widehat{ZOY}$; según esto, $\hat{\varepsilon} + \hat{\omega} + \hat{\rho} = 360°$.

El plano del cuadro se designa por una letra griega, en este caso π.

En la parte inferior de la figura se representa el conjunto proyectado sobre el cuadro tal y como queda realmente. Como puede verse, el punto *P* es la proyección directa ortogonal del punto del espacio sobre el cuadro y constituye realmente la perspectiva axonométrica, es decir, cuando dibujamos un cuerpo en este sistema, lo que representamos es la proyección directa o perspectiva axonométrica verdadera

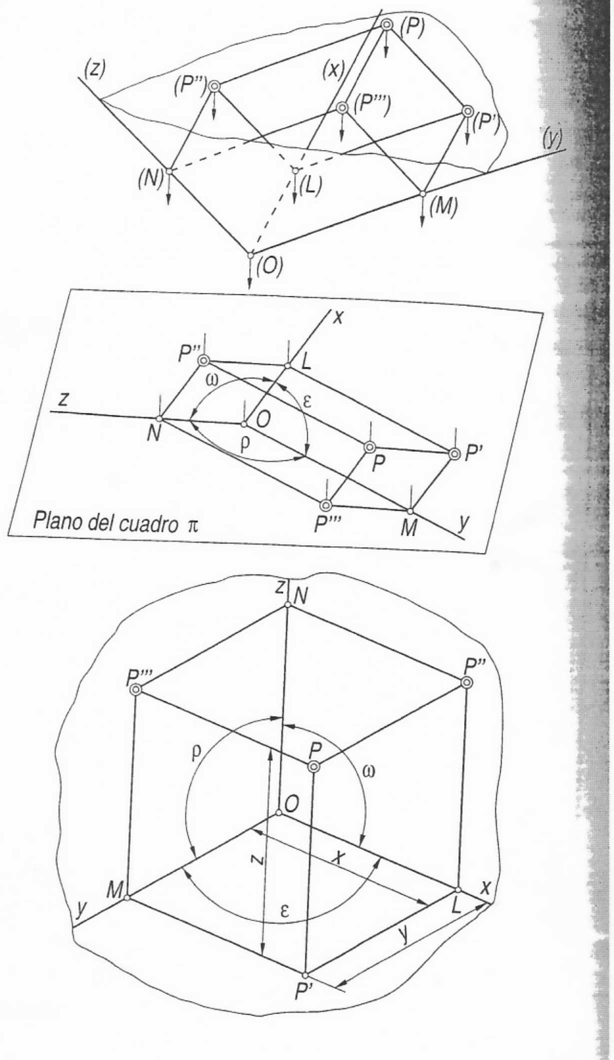


Fig. 2.

Los puntos *P'*, *P''* y *P'''* son proyecciones de proyecciones, pues resultan de proyectar los puntos *(P')*, *(P'')* y *(P''')* que son a su vez proyecciones previas, así se llaman, sobre las caras del triedro en el espacio.

En total son cuatro las proyecciones axonométricas, una directa ortogonal y otras tres laterales sobre los planos del sistema, pero todas ellas situadas en un solo plano, que es el del cuadro o del dibujo.

El punto *P* está en proyección a las distancias *x*, *y*, *z* de los planos *ZOY*, *ZOX* y *XOY* respectivamente, siendo éstas sus coordenadas cartesianas ortogonales.

De la figura deducimos que dadas dos proyecciones cualesquiera de las cuatro que tiene un punto, se pueden hallar las otras dos, o lo que es lo mismo, un punto queda definido en el espacio por dos de sus proyecciones, siendo forzadas las otras dos, así, por ejemplo, conocemos *P* y *P'*, por *P'* trazamos las paralelas a los ejes *X* e *Y* a los que cortan en los puntos *L* y *M*, por *L* y *M* se trazan las paralelas al eje *Z* y por *P* las paralelas a los ejes *X* e *Y* que cortan a las anteriores en *P''* y *P'''* que son las proyecciones que buscábamos

Para construir la perspectiva de un cuerpo o pieza, se comienza por un punto que sea, por ejemplo, una esquina, por él se trazan las paralelas a los ejes y sobre éstas se miden la anchura, la altura y la profundidad, completando después el paralelepípedo por medio de paralelas.

Pasemos a la **Fig 3**

Tenemos de nuevo el triedro en el espacio con los ejes *(X)*, *(Y)* y *(Z)* al que cortamos por un plano π paralelo al cuadro, plano que podemos considerar como verdadero cuadro; la sección que produce en el triedro el plano π es el triángulo *(A)(B)(C)*; los puntos *(A)*, *(B)* y *(C)* son los de intersección de los ejes con el cuadro y los lados del triángulo *ABC*, rectas llamadas π_1, π_2 y π_3, son las trazas o intersecciones del cuadro con las caras del triedro.

Proyectamos ortogonalmente el conjunto sobre el plano π' y tenemos el punto *O* como proyección del origen *(O)* y las rectas *X*, *Y* y *Z* como proyecciones de las aristas *(X)*, *(Y)* y *(Z)*.

En la parte inferior de la figura hemos representado los ejes *X*, *Y* y *Z* proyectados sobre el plano π' que viene definido por el triángulo de trazas *ABC* y lados π_1, π_2 y π_3.

Los ejes *X*, *Y* y *Z* resultan perpendiculares a los lados *BC*, *CA* y *AB* respectivamente.

El triángulo *ABC* de trazas del plano del cuadro con el triedro se llama **triángulo fundamental**, pues su conocimiento es dato suficiente para que quede definido un sistema axonométrico, conocido el triángulo *ABC*, los ejes se proyectan según las alturas de dicho triángulo; los pies de las alturas, puntos *H*, *I* y *J*, nos definen el triángulo órtico del *ABC*, siendo los ejes las bisectrices de los ángulos de dicho triángulo.

En la perspectiva convencional de la **Fig. 3** se indica que los ángulos $\widehat{(C)H(A)}$, $\widehat{(A)J(B)}$ y $\widehat{(B)I(A)}$ son rectos. La recta $\overline{COH}$ es la traza con el cuadro π del plano proyectante ortogonal del eje *Z*; la recta $\overline{(O)H}$ por estar en *XOY* y pasar por *(O)* es perpendicular al eje *Z* y por lo tanto el triángulo *(C)(O)H* es rectángulo en *(O)*, la recta *(O)H* es la línea de máxima pendiente de *XOY* con el cuadro y, por lo tanto, α_1 es el ángulo que forma el plano *XOY* con el cuadro; trazando por *(O)* la paralela a $\overline{(C)H}$ se tiene también el ángulo α_1, alterno interno del $\widehat{(C)H(O)}$. El ángulo $\hat{\gamma} = \widehat{H(C)(O)}$ es el ángulo que forma el eje *Z* con el cuadro.

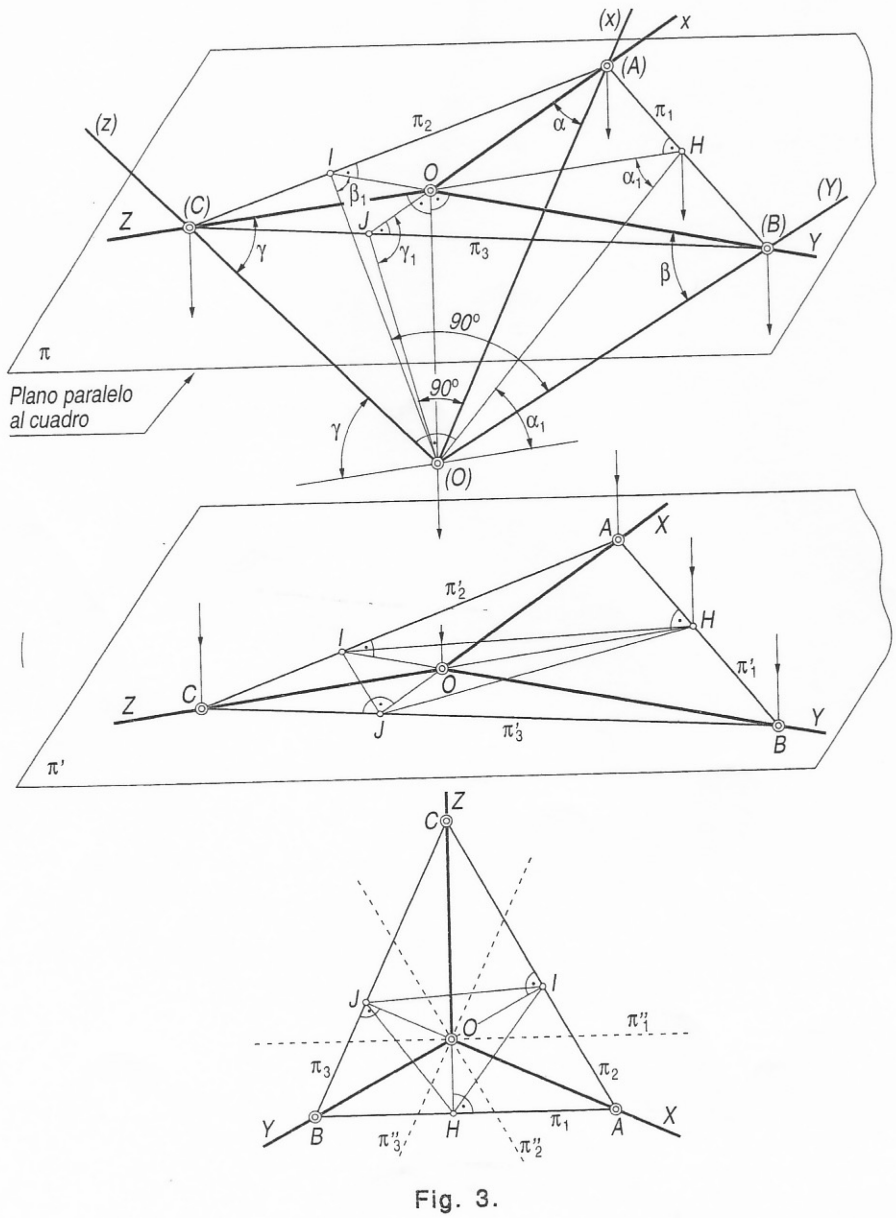


Fig. 3.

Con igual razonamiento deducimos lo siguiente:

$\alpha = \widehat{J(A)(O)}$ ángulo del eje *X* con el cuadro

$\gamma_1 = \widehat{(A)J(O)}$ ángulo del plano *ZOY* con el cuadro

$\beta = \widehat{I(B)(O)}$ ángulo del eje *Y* con el cuadro

$\beta_1 = \widehat{(B)I(O)}$ ángulo del plano *XOZ* con el cuadro

También son rectángulos en *(O)* los triángulos *(A)(O)J* e *I(O)(B)*.

Cuando suponemos que el plano del cuadro pasa por el origen *(O)*, el triángulo *ABC* se reduce a un punto, dicho origen, y las trazas del cuadro con los planos del sistema son las tres rectas π''_1, π''_2 y π''_3 que pasan por *O* y son paralelas a π_1, π_2 y π_3, respectivamente, o lo que es lo mismo, perpendiculares a los ejes

2. Notaciones

Los ejes se designan por *X*, *Y* y *Z*

Un punto del espacio se designa por una letra o por un número: *A(A'-A''-A''')* ó *3(3'-3''-3''')*, siendo:

- *A*: la proyección directa.
- *A'*: la proyección sobre el plano *XOY*.
- *A''*: la proyección sobre el plano *XOZ*.
- *A'''*: la proyección sobre el plano *YOZ*.

Una recta se designa por una letra minúscula: *r(r'-r''-r''')* siendo *r* la proyección directa y *r'*, *r''* y *r'''* las proyecciones sobre los planos del sistema.

Un plano se designa por una letra griega: α (α_1-α_2-α_3) siendo α_1, α_2 y α_3 las trazas del plano α con los planos del sistema.

3. Sistema axonométrico isométrico

Si los tres ejes forman el mismo ángulo con el plano del cuadro se proyectan formando ángulos de *120º* entre sí.

En este caso, el triángulo fundamental *ABC* de la **Fig. 3** es equilátero y el sistema se llama "isométrico" (igual medida), dado que el coeficiente de reducción es el mismo para los tres ejes.

Si dos ejes forman el mismo ángulo con el cuadro, el sistema se llama "dimétrico" (dos medidas), y si los ejes forman ángulos diferentes con el cuadro, el sistema se llama "trimétrico" (tres medidas), y habría un coeficiente de reducción para cada eje.

En este estudio nos limitamos al sistema axonométrico isométrico por ser el más sencillo y rápido.

4. Escala isométrica (Figs. 4 y 5)

En el sistema axonométrico isométrico, toda recta, digamos arista de un cuerpo o pieza, que sea paralela a uno de los ejes del sistema, al proyectarla sobre el cuadro se reduce en la misma proporción que aquéllos, es decir, que su proyección se obtiene multiplicando la longitud real por el valor del coseno de *35º 16'* que es el ángulo que forma cualquiera de los ejes isométricos con el plano de proyección o cuadro.

La escala de reducción isométrica, común para los tres ejes, es: **0,816 : 1**,

siendo el valor del cos 35º 16' = *0,816*

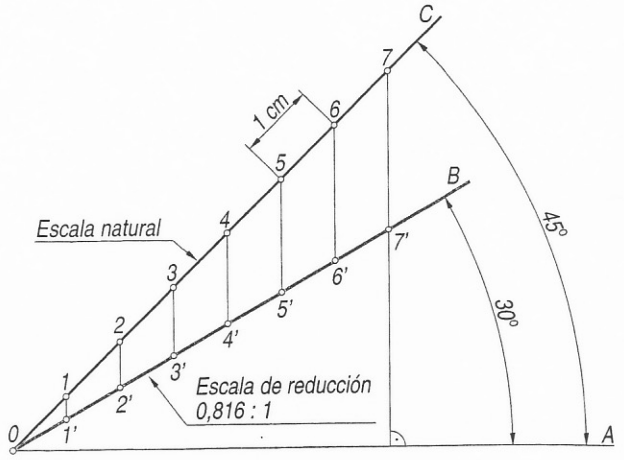


Fig. 4.

Para construir la escala isométrica, tomamos una recta $\overline{OA}$ (Fig. 4), a partir de *O* trazamos las rectas $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ que formen *30º* y *45º* con $\overline{OA}$ y sobre la recta $\overline{OC}$ dibujamos la escala natural; proyectando esta escala natural sobre $\overline{OB}$ según la dirección perpendicular a $\overline{OA}$, se tiene en $\overline{OB}$ la escala isométrica *0,816 : 1*; es decir, una medida real puesta sobre $\overline{OC}$ se proyecta en el cuadro según el valor correspondiente que tenga en $\overline{OB}$.

En la **Fig. 5** se dibuja la misma construcción de la escala isométrica, pero ya sobre la proyección de los ejes. Trazamos una recta cualquiera π_1 perpendicular a la proyección del eje *Z*, la cual será la traza con *XOY* de un plano paralelo al del cuadro, esta traza corta en *A* y *B* a los ejes *X* e *Y* respectivamente; el triángulo *AOB* es rectángulo en *O* en el espacio, por lo que abatido este triángulo sobre el cuadro π nos da el triángulo verdad AO_0B, siendo $\overline{AB}$ la hipotenusa, O_0 el vértice abatido en la prolongación de *Z* y sobre la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro *D*.

Sobre uno de los catetos $\overline{O_0A}$ o $\overline{B_0O}$ construimos la escala natural y referimos sobre el eje correspondiente; en la figura se ha tomado sobre $\overline{O_0A}$ y la escala isométrica se obtiene sobre el eje *X*, donde pueden verse los centímetros reducidos.

En isométrico y ya aplicado a la perspectiva de piezas en el Dibujo Industrial, se puede no considerar el acortamiento o reducción que sufren las rectas isométricas, representándolas directamente en proyección con la medida real que tengan en el espacio y de esta forma conseguiremos la perspectiva de una pieza mayor pero semejante a la dada.

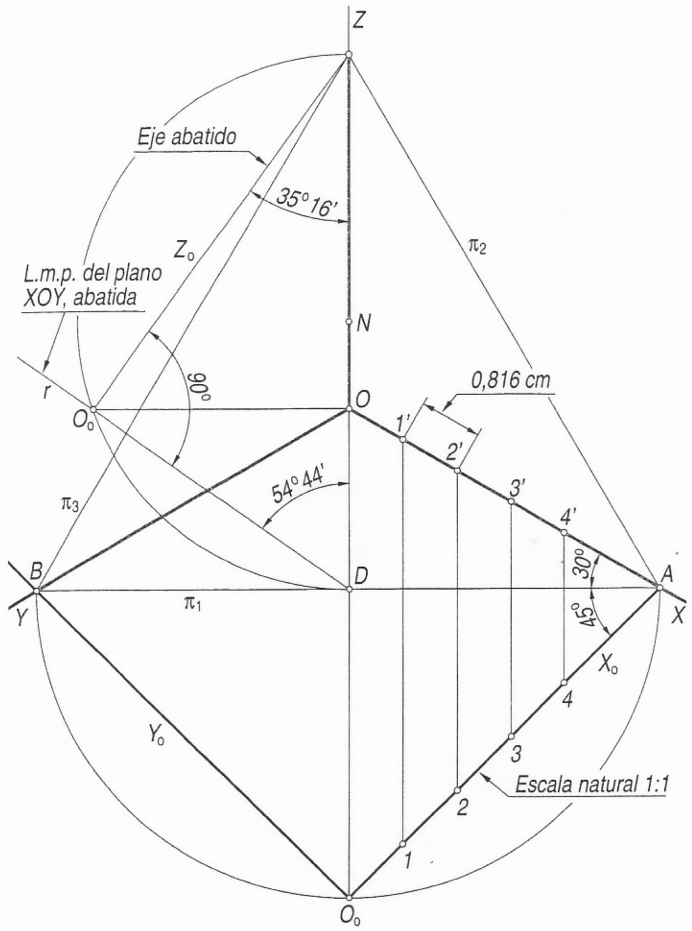


Fig. 5.

5. Representación del punto

Los tres planos del sistema, al cortarse, dividen al espacio en ocho triedros. Para designar cada triedro consideramos los dos sentidos + y – de cada eje a partir del origen.

En la **Fig. 6** se representan los puntos A, B, C y D.

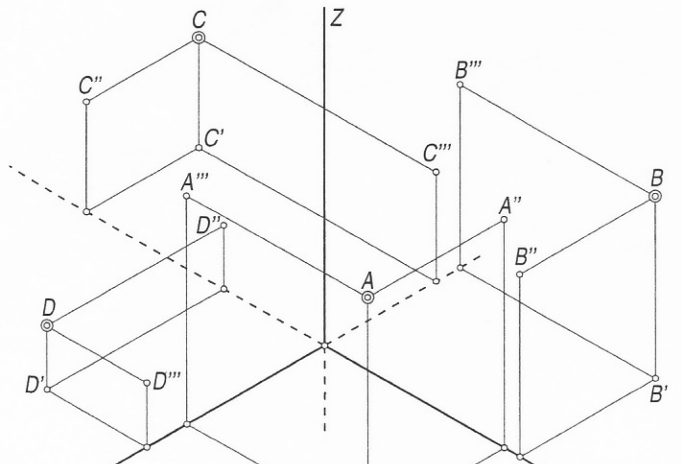


Fig. 5.

Punto A. en el triedro $+X$, $+Y$, $+Z$.

Punto B: en el triedro $+X$, $-Y$, $+Z$.

Punto C. en el triedro $-X$, $-Y$, $+Z$.

Punto D. en el triedro $-X$, $+Y$, $+Z$

6. Proyecciones de una recta (Fig. 7)

Una recta en el espacio queda definida conociendo dos de sus puntos. En la figura, dados dos puntos P-P' y Q-Q' por dos de sus proyecciones, la recta que definen se obtiene uniendo las proyecciones homónimas de los puntos. La proyección directa r pasa por P y Q y la proyección horizontal r' pasa por P' y Q'.

De lo dicho anteriormente se deduce que para situar un punto en una recta, las proyecciones del punto deben estar sobre las proyecciones homónimas de la recta.

Conociendo dos proyecciones cualesquiera de la recta, ésta queda definida y se pueden determinar las restantes como se indica en el apartado siguiente.

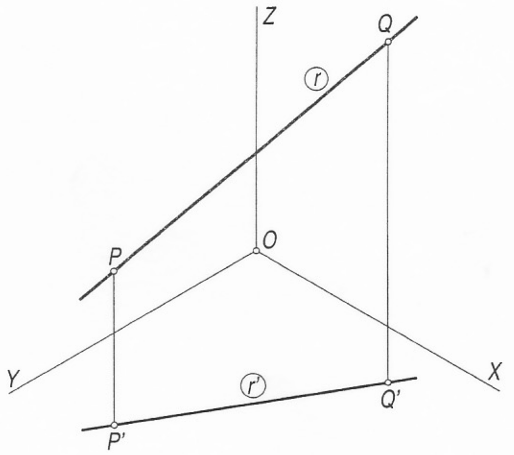


Fig. 7.

7. Proyecciones de una recta oblicua. Trazas de la recta (Fig. 8)

Supongamos una recta t oblicua cualquiera respecto a los planos de proyección. Como hemos dicho anteriormente, la recta queda definida conociendo dos cualesquiera de sus proyecciones

Sean t y t' las dos proyecciones conocidas. El punto T_1-T'_1 es la traza de la recta con el plano XOY por ser donde se cortan dichas proyecciones. Refiriendo T'_3, punto de corte de t' y el eje Y, a T_3-T'''_3 sobre la proyección t, se obtiene la traza tercera T_3 de la recta con el plano ZOY. De igual forma, prolongando t' hasta que corte en T'_2 al eje X y refiriendo T'_2 a T_2-T''_2 sobre la proyección t, se obtiene la traza segunda con el plano XOZ.

Como se ve, en los puntos trazas, primera, segunda y tercera, se cortan la proyección directa de la recta y la proyección primera, segunda y tercera, respectivamente.

Planos proyectantes de la recta son aquellos que la proyectan sobre cada uno de los planos de proyección. El plano proyectante de la recta sobre el cuadro o del dibujo tiene por traza la proyección directa t de la recta. El plano proyectante sobre el XOY es el plano $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ y sobre los planos XOZ y ZOY son los planos $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y $\gamma(\gamma_1\text{-}\gamma_2\text{-}\gamma_3)$ respectivamente.

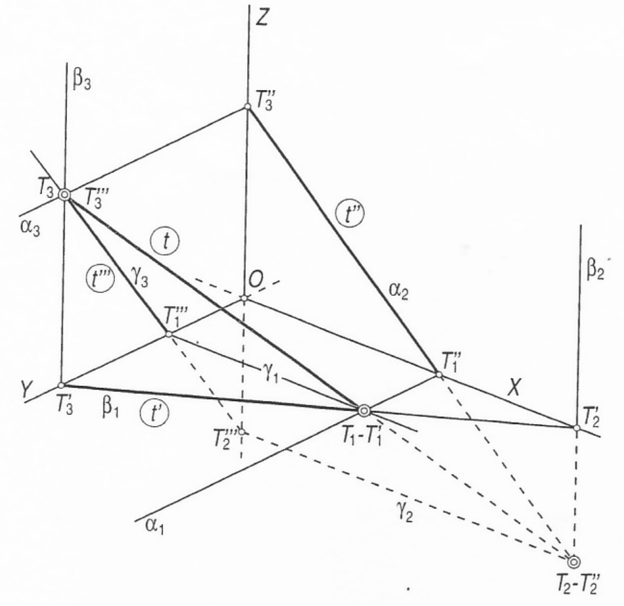


Fig. 8.

En la figura se observa la forma de obtener las proyecciones t'' y t''' de la recta conociendo ya las proyecciones de las tres trazas que son puntos situados sobre los planos; así, por ejemplo, t'' viene definida por los puntos T'''_1, T''_2 y T''_3.

Obsérvese que las proyecciones t', t'' y t''' se confunden respectivamente con β_1, α_2 y γ_3, trazas de los planos proyectantes de la recta con los planos del triedro sobre el que proyectan a dicha recta.

Cuando se conocen otras dos proyecciones, en vez de la directa y la horizontal, siguiendo los pasos de la figura se obtienen con sencillez y de la misma forma las restantes.

8. Recta paralela al plano *XOY* (Fig. 9)

La recta $t(t'\text{-}t''\text{-}t''')$ es paralela al plano XOY porque sus proyecciones, directa t y horizontal t', son paralelas y, por lo tanto, no tiene traza horizontal; sus proyecciones t'' y t''' se cortan en el mismo punto $T'''_2 \equiv T''_3$ del eje Z, en la figura se indican todas las proyecciones y todas las trazas de la recta.

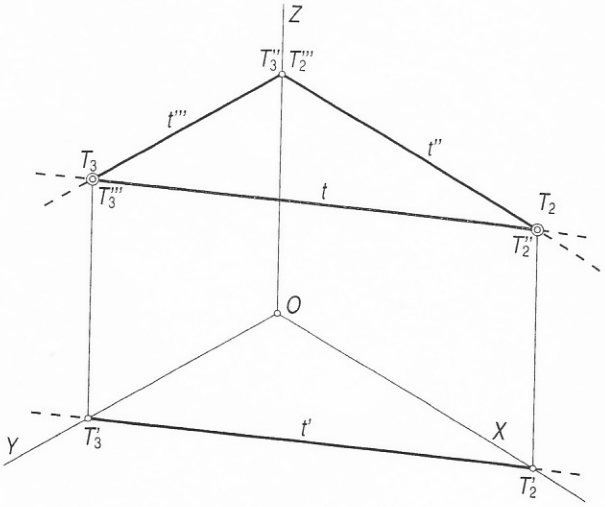


Fig. 9.

9. Recta paralela al plano *XOZ* (Fig. 10)

Razonamos como en el caso anterior. Si una recta es paralela a un plano, no tiene traza con él y, por tanto, la proyección directa r y la proyección r'' sobre el plano ZOX han de ser paralelas, de esta forma, el punto traza R_2 es impropio.

Las proyecciones r' y r''' son paralelas respectivamente a los ejes X y Z, ya que la recta está en el plano $\beta_1\text{-}\beta_3$ paralelo al ZOX. Las dos trazas de la recta son los puntos $R_1(R'_1\text{-}R''_1\text{-}R'''_1)$ y $R_3(R'_3\text{-}R''_3\text{-}R'''_3)$. La recta r dista del plano ZOX el segmento $R_1\text{-}R''_1$

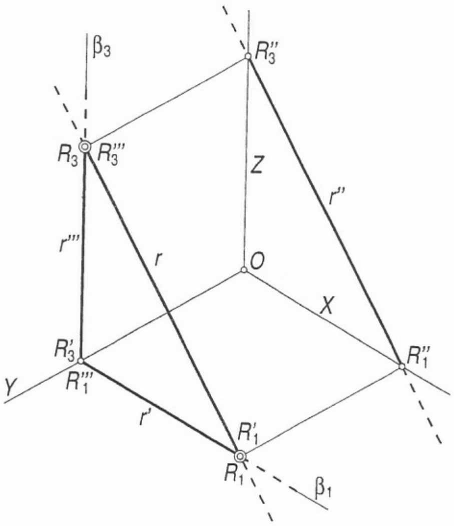


Fig. 10.

10. Recta paralela al plano *YOZ* (Fig. 11)

Se trata en este caso, como en el anterior, de una de las rectas llamadas frontales por estar situadas en un plano paralelo a uno de los planos verticales del sistema, los planos ZOX y ZOY.

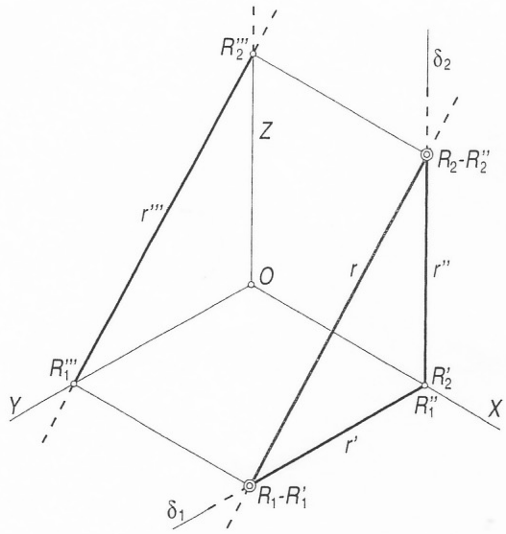


Fig. 11.

La proyección directa r y la proyección r''' son paralelas; r' y r'' se cortan en un punto del eje X, sólo tiene dos trazas, R_1 y R_2, con los planos XOY y ZOX respectivamente, siendo las proyecciones de estas trazas los puntos $R_1(R'_1\text{-}R''_1\text{-}R'''_1)$ y $R_2(R'_2\text{-}R''_2\text{-}R'''_2)$.

11. Recta paralela al eje X (Fig. 12)

La proyección directa r de la recta, así como las proyecciones r' y r'' sobre los planos XOY y ZOY, son paralelas al eje X. La recta en el espacio es perpendicular al plano ZOY y por lo tanto su proyección sobre este plano es un punto que llamamos r''', esta recta sólo tiene una traza, pues sólo corta al plano ZOY y es el punto $R_3(R'_3\text{-}R''_3\text{-}R'''_3)$, coincidente con r'''.

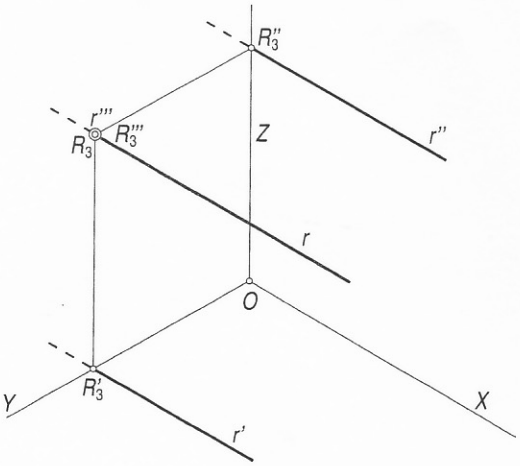


Fig. 12.

12. Recta paralela al eje Y (Fig. 13)

La proyección directa s de la recta, así como las proyecciones s' y s''' sobre los planos XOY y ZOY, son paralelas a la proyección del eje Y. La recta es perpendicular al plano ZOX y por lo tanto su proyección sobre este plano es el punto s''; sólo tiene una traza que es el punto $S_2(S'_2\text{-}S''_2\text{-}S'''_2)$ donde corta al plano ZOX, coincidente con s''.

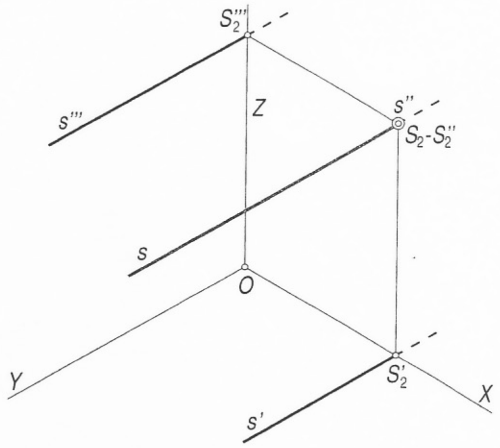


Fig. 13.

13. Recta paralela al eje Z (Fig. 14)

La recta $t(t'\text{-}t''\text{-}t''')$ es paralela al eje Z, siendo su proyección horizontal el punto t' y el resto de las proyecciones t, t'' y t''' son paralelas al eje Z No tiene traza más que con el plano XOY, punto T_1

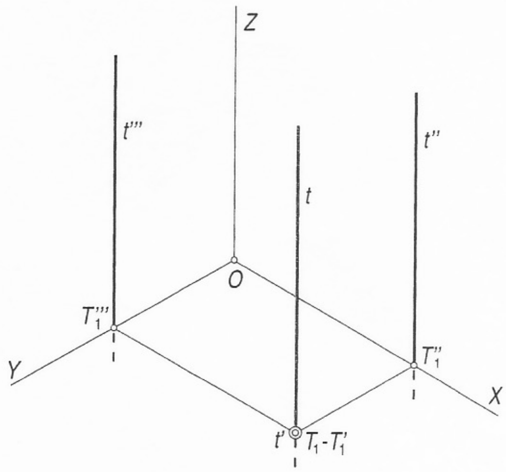
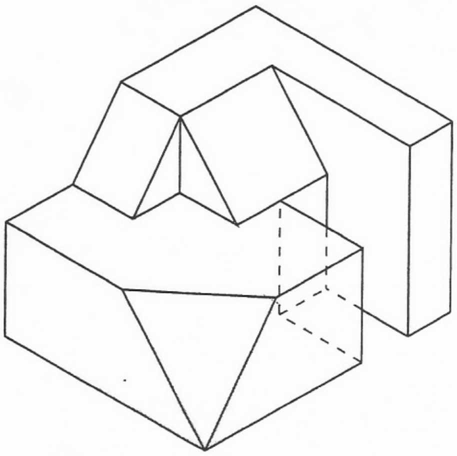


Fig. 14.



Pieza en perspectiva axonométrica cuyas aristas son rectas horizontales, frontales o de punta.

14. Representación del plano (Fig. 15)

Como en otros sistemas de representación, en el sistema axonométrico un plano viene definido de la forma más sencilla por medio de sus trazas o rectas según las cuales corta a los planos del triedro.

Un plano oblicuo corta a los planos del sistema según tres rectas que es lógico se corten dos a dos en un punto de cada eje; así, en la **Fig. 15**, la traza del plano α con el plano *XOY* es α_1 que corta en *A* al eje *X* y en *B* al eje *Y*; la traza con el plano *ZOX* es α_2 que corta en *A* al eje *X* y en *C* al eje *Z* e igualmente la traza con el plano *ZOY* es α_3 que pasa por los puntos *B* y *C*. De lo dicho se deduce que dos trazas cualesquiera definen un plano, pues son dos rectas de él y la tercera traza es forzada. El triángulo *ABC* cuyos vértices son los puntos donde el plano corta a los ejes, se llama triángulo de trazas.

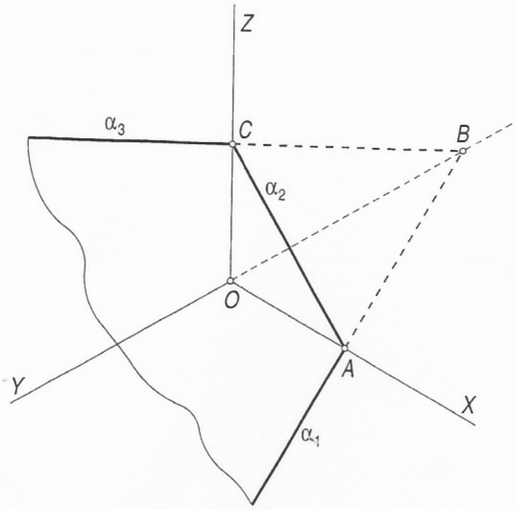


Fig. 15.

En las **Figs. 16, 17 y 18** se indican otras posiciones de planos oblicuos cualesquiera que se obtienen variando la posición de los puntos *A*, *B* y *C*. La línea a pulso se ha dibujado para dar al lector una mayor sensación de realidad.

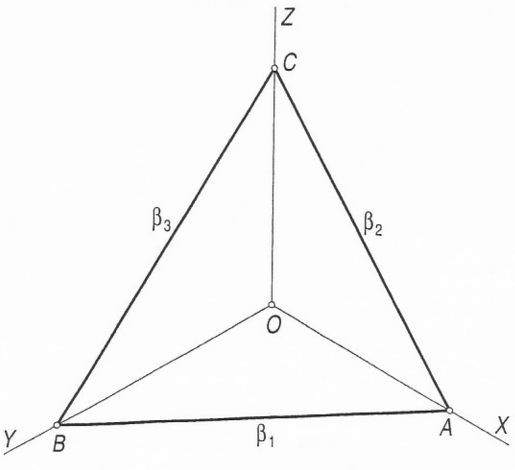


Fig. 16.

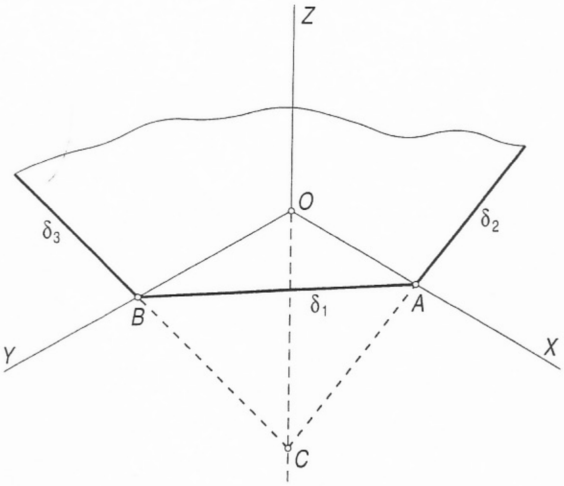


Fig. 17.

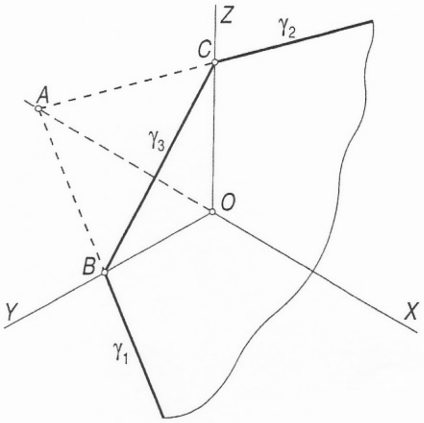


Fig. 18.

15. Plano paralelo al eje *X* (Fig. 19)

El plano α_1-α_2-α_3 es paralelo al eje *X* por tener las trazas α_1 y α_2 paralelas a dicho eje; la traza α_3 une los puntos *B* y *C* donde α_1 y α_2 cortan a los ejes *Y* y *Z*. Este plano es proyectante sobre el plano *ZOY*.

El punto *A* donde el plano corta el eje *X* es impropio en este caso.

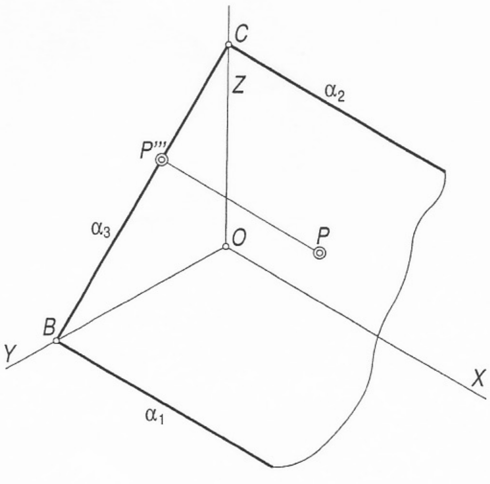


Fig. 19.

16. Plano paralelo al eje *Y* (Fig. 20)

El plano $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ es paralelo al eje *Y*, pues tiene sus trazas β_1 y β_3 paralelas a dicho eje. Todo punto, tal como *P-P''*, que tenga su proyección *P''* sobre β_2, pertenece al plano ya que éste es proyectante sobre el *ZOX*.

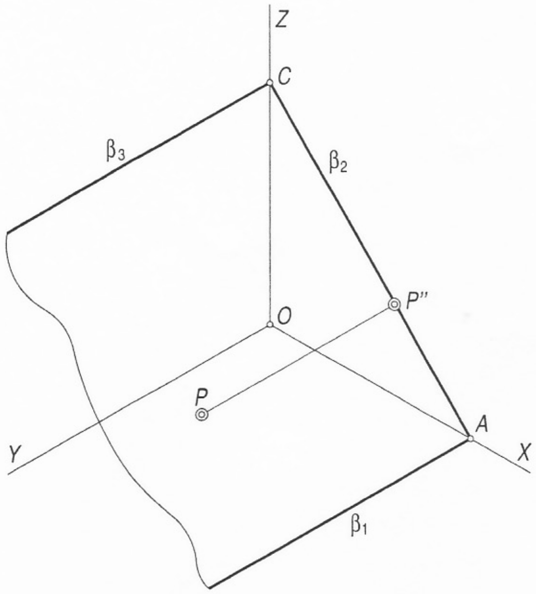


Fig. 20.

17. Plano paralelo al eje *Z* (Fig. 21)

El plano α es paralelo al eje *Z*, pues, como en los casos anteriores, tiene dos trazas α_2 y α_3 paralelas a dicho eje. Este plano es proyectante horizontal, por lo cual, todos los puntos de él, tal como el *P*, se proyectan horizontalmente en *P'* sobre su traza horizontal α_1.

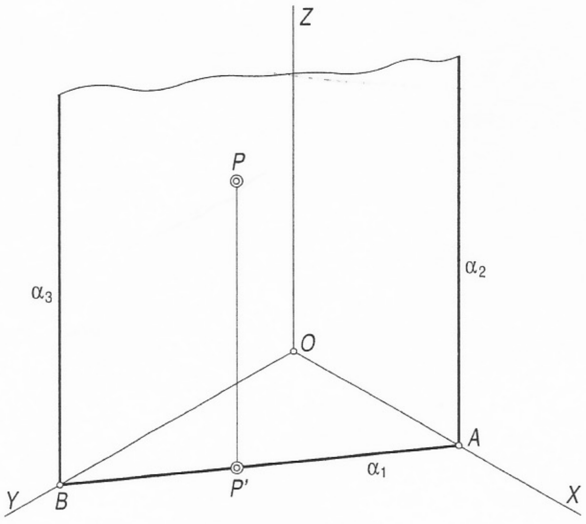


Fig. 21.

18. Plano paralelo al plano *XOY* (Fig. 22)

El plano $\beta(\beta_2\text{-}\beta_3)$ de la figura es paralelo al *XOY*, es decir, es horizontal, de cota *OT*; corta en el punto *T* al eje *Z*. El plano es perpendicular al eje *Z* y por lo tanto proyectante sobre los planos *ZOX* y *ZOY*; según esto, las proyecciones segunda y tercera de los puntos, rectas y figuras contenidas en este plano estarán confundidas con las trazas β_2 y β_3 respectivamente, estas trazas son paralelas a los ejes *X* e *Y* y la traza con el plano *XOY* es impropia.

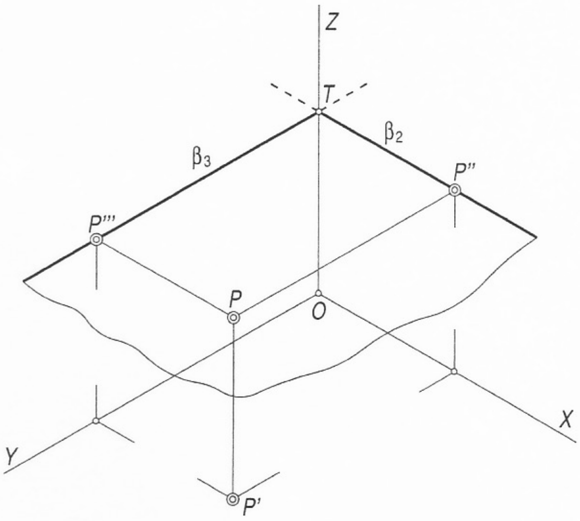


Fig. 22.

19. Plano paralelo al plano *XOZ* (Fig. 23)

El plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_3)$ es paralelo al plano *ZOX*, siendo sus trazas propias α_1 y α_3 paralelas a los ejes *X* y *Z* respectivamente. La traza α_2 es impropia. A este plano podemos aplicar todo lo dicho en el caso anterior, ya que por ser perpendicular al eje *Y* es doblemente proyectante.

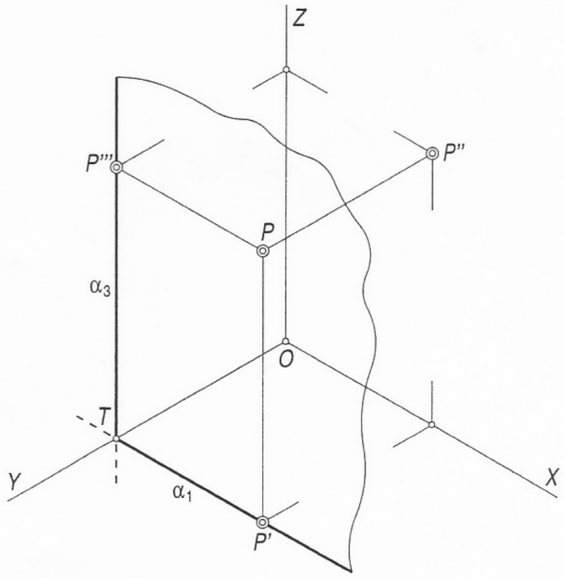


Fig. 23.

20. Plano paralelo al plano *YOZ* (Fig. 24)

Indicamos lo mismo que en los dos casos anteriores. Todo plano paralelo al *ZOY* tiene por trazas con los planos *XOY* y *ZOX* dos rectas paralelas a los ejes *Y* y *Z* respectivamente En la figura, el plano α_1-α_2 es de este tipo y corta al eje *X* en el punto *T*; la traza α_3 es impropia. El plano es proyectante sobre el *XOY* y sobre el *ZOX* y por ello las proyecciones de todos los elementos geométricos contenidos en él sobre los planos citados estarán sobre las trazas α_1 y α_2.

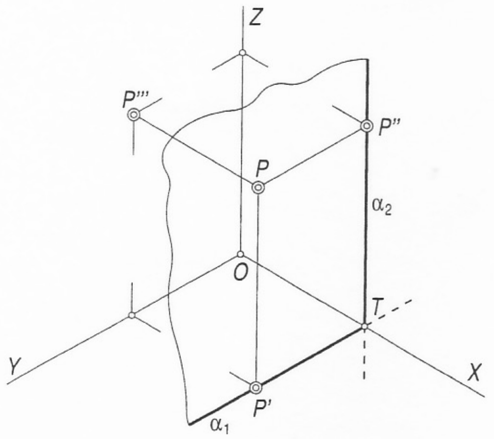


Fig. 24.

21. Trazas de un plano dado por tres puntos (Fig. 25)

Los puntos *P*, *Q* y *T*, no alineados, definen un plano α cuyas trazas se obtienen uniendo las trazas de las rectas que estos puntos determinan, uniéndolas dos a dos. Así, la recta *s* une los puntos *T* y *Q* y la recta *r* los *P* y *Q*; las trazas de estas rectas son los puntos S_1, S_3, R_2 y R_3, las cuales son suficientes para dibujar las trazas del plano. La traza α_3 pasa por S_3 y R_3; la traza α_1 pasa por *M* y por S_1 y la traza α_2 pasa por los puntos *L*, *N* y R_2, basta, pues, unir las trazas homónimas de las rectas definidas por los puntos dados.

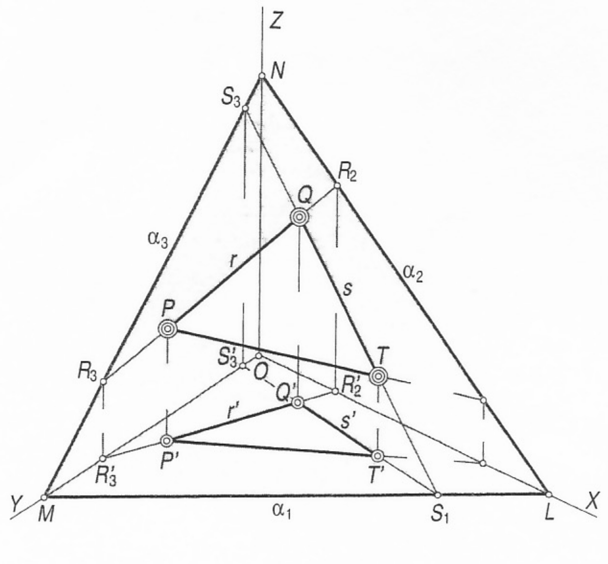


Fig. 25.

22. Posiciones relativas de dos rectas (Fig. 26)

Las rectas *r*-*r'* y *t*-*t'* se cortan en el punto *P*-*P'* **del espacio**, según esto, la condición para que sepamos que dos rectas se cortan en el espacio es que, en proyección, el punto *P* donde se cortan las proyecciones directas y el punto *P'* de intersección de las proyecciones horizontales, estén en una misma paralela al eje *Z*.

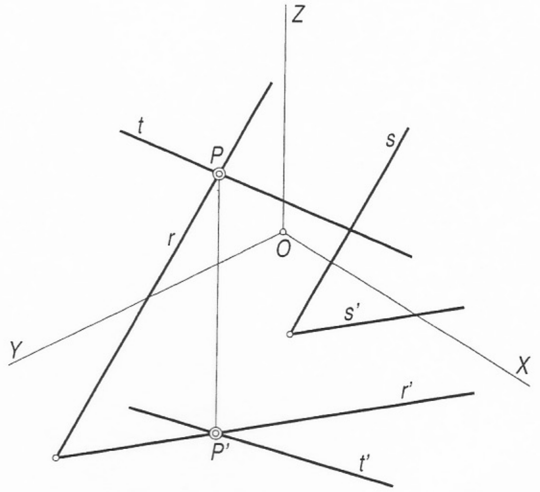


Fig. 26.

Las rectas *r*-*r'* y *s*-*s'* son paralelas en el espacio porque son paralelas las proyecciones del mismo nombre.

Las rectas *s*-*s'* y *t*-*t'* son dos rectas que se cruzan **en el espacio** por no cumplir ninguna de las dos condiciones anteriores.

23. Intersección de dos planos (Fig. 27)

Tenemos los planos α y β; al cortarlos por los planos del sistema, se obtienen sus diversas trazas, las cuales, al cortarse las del mismo nombre, dan puntos de la intersección de los dos planos.

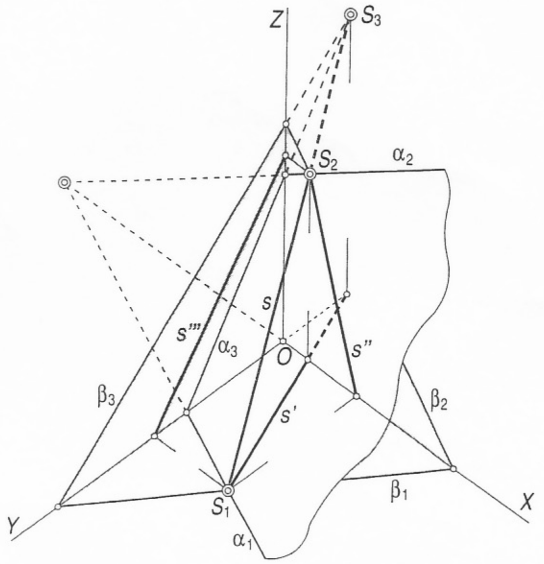


Fig. 27.

En la figura, la recta s, intersección de los planos $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ cualesquiera, se obtiene al unir los puntos S_1, S_2 y S_3 en que se cortan dos a dos las trazas del mismo nombre de los dos planos Después de obtenida la proyección directa s, se refieren los puntos S_1, S_2 y S_3 a los ejes y se hallan las demás proyecciones tal como indica claramente la figura.

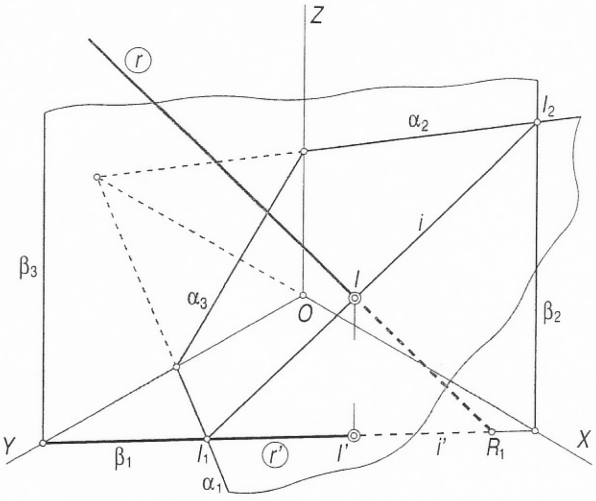


Fig. 28.

24. Intersección de recta y plano (Fig. 28)

Sea el plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y la recta $r\text{-}r'$. Se hace pasar por la recta un plano cualquiera, el mejor será uno de sus planos proyectantes; en la figura se hace pasar el plano $\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3$, proyectante sobre el XOY, y se determina la intersección $i\text{-}i'$ de este plano con el plano dado. La recta i encuentra a la recta r en el punto $I\text{-}I'$ buscado.

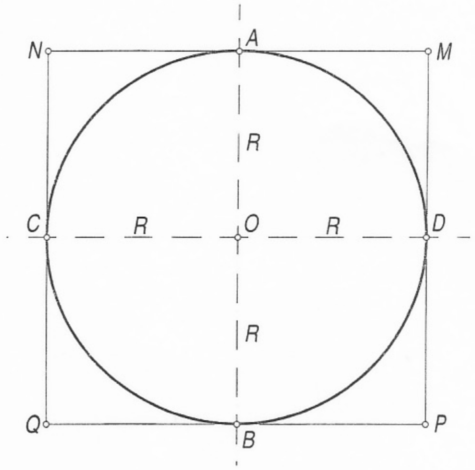


Fig. 29.

25. Perspectiva axonométrica isométrica de la circunferencia

Una circunferencia, situada en una cara de una pieza, se proyecta según una elipse. La construcción de esta elipse es el único problema que presenta la perspectiva y, por ello, vamos a simplificarlo al máximo. De esta forma el lector podrá obtener las perspectivas con gran rapidez

Se trata de hallar la perspectiva de la circunferencia de centro O y radio R, situada en cada uno de los tres planos XOY, ZOX y ZOY o en planos paralelos a ellos (Fig. 29)

Se suponen dos diámetros perpendiculares AB y CD y se supone también un cuadrado circunscrito a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia son los extremos A, B, C y D de los diámetros **(Fig. 29)**.

En la **Fig. 30** está dibujada la perspectiva de la circunferencia en los tres planos.

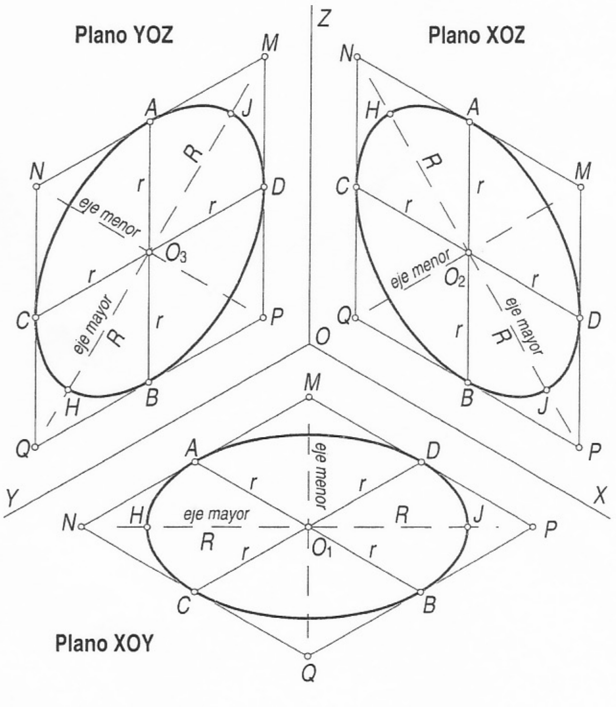
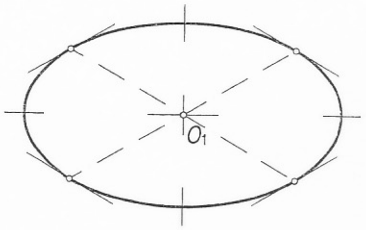


Fig. 30.

1°. Circunferencia en el plano XOY (Fig. 30)

Por el centro O_1 se trazan los diámetros conjugados de la elipse, $\overline{A\text{-}B}$ paralelo al eje X y $\overline{C\text{-}D}$ paralelo al eje Y, tomando, en el caso de isométrico, $\overline{O\text{-}A} = \overline{O\text{-}B} = \overline{O\text{-}C} = \overline{O\text{-}D} = r$, siendo r el radio R real, reducido en la escala gráfica explicada Se trazan muy finas las rectas tangentes en A, B, C y D y se obtiene el rombo $N\text{-}M\text{-}P\text{-}Q$, que es la perspectiva del cuadrado circunscrito

Como una ayuda más para el trazado de la elipse, el eje mayor es perpendicular a la dirección del eje Z y el eje menor es paralelo a dicha dirección El eje mayor $\overline{H\text{-}J}$ es igual al diámetro $2R$ de la circunferencia.



Circunferencia en el plano XOY

Fig. 31.

Se construye la elipse a mano y con lápiz, teniendo en cuenta la condición de tangencia con los lados del rombo.

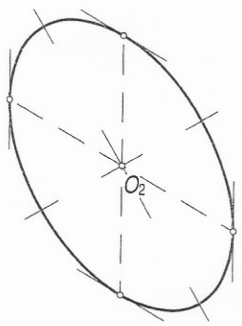
En resumen, el trazado queda reducido a lo que indica la **Fig. 31**. No hay que trazar más líneas que las que muestra esta figura.

2°. Circunferencia en el plano XOZ (Fig. 30)

Por el centro O_2, de ella, se trazan los diámetros conjungados $\overline{C\text{-}D}$ paralelo al eje X y $\overline{A\text{-}B}$ paralelo al eje Z, tomando $\overline{O\text{-}A} = \overline{O\text{-}B} = \overline{O\text{-}C} = \overline{O\text{-}D} = r$, radio reducido.

El eje mayor de la elipse, $\overline{H\text{-}J}$ es perpendicular a la dirección del eje Y y es igual al diámetro $2R$ de la circunferencia. El eje menor es paralelo a la dirección del eje Y.

La construcción es igual a la anterior, que queda reducida a las líneas que indica la **Fig. 32**.



Circunferencia en el plano XOZ

Fig. 32.

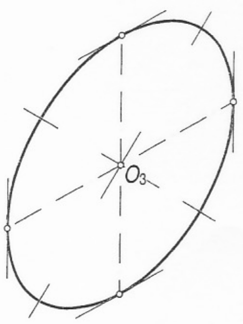
3°. Circunferencia en el plano YOZ (Fig. 30)

La construcción es igual que en los dos casos anteriores. Por el centro O_3 se trazan los diámetros $\overline{A\text{-}B}$ y $\overline{C\text{-}D}$ paralelos a los ejes Z e Y, respectivamente, siendo $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, radio reducido.

El eje mayor de la elipse es perpendicular a la dirección del eje X y mide $\overline{H\text{-}J} = 2R$ y el eje menor es paralelo a la dirección de dicho eje.

La construcción queda reducida al menor número posible de líneas, tal como indica la **Fig. 33**

Si la elipse es muy grande, pueden obtenerse algunos puntos de ella, por ejemplo, uno en cada cuadrante, a fin de facilitar el trazado a mano de ella.



Circunferencia en el plano YOZ

Fig. 33.

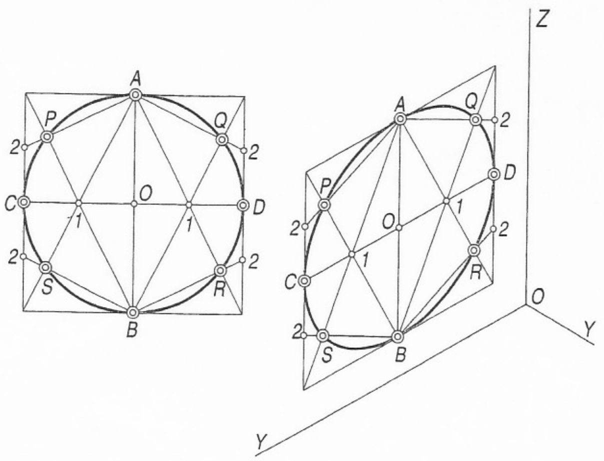


Fig. 34.

En la **Fig. 34** se indica la construcción. Se completa el cuadrado circunscrito y el rombo en la perspectiva y se toman los puntos *1* y *2* que se indican, que son los puntos medios de los segmentos respectivos. Las rectas *A-2* y *B-1*, al cortarse, proporcionan dos puntos *P* y *Q* de la elipse

Se puede sustituir la elipse por un óvalo, que es una curva aproximada a ella, aunque algo achatada en los extremos del eje mayor.

En la **Fig. 35** se tienen los tres rombos en los que están inscritos los óvalos. Los centros de curvatura para hacer el trazado con el compás son los puntos C_1, C_2, C_3 y C_4

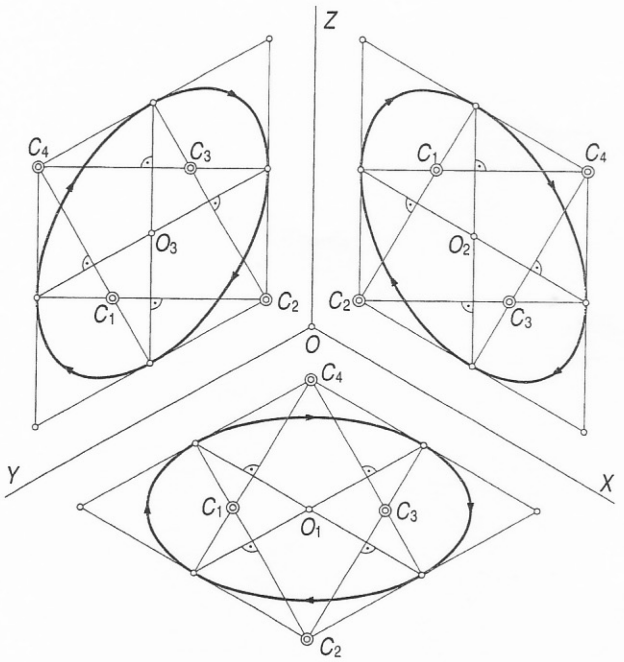


Fig. 35.

Este procedimiento resulta más laborioso y requiere una mayor precisión para que los arcos del óvalo sean tangentes.

26. Perspectivas sin reducir

Puede utilizarse una mayor simplificación con relación a todo lo explicado. Consiste ésta en no reducir ninguna cota que figure en el plano. Si la cota es *70*, se coloca *70* sobre el eje *X* o el *Y* o el *Z*. De esta forma, la perspectiva resulta semejante, pero algo mayor a la que se obtendría reduciendo las medidas. Si la escala de reducción era *0,816:1*, al no reducir, lo que se hace es aplicar la escala *1:0,816 = 1,22*. Según esto, se obtendría una perspectiva que sería aproximadamente el *22* % mayor.

27. Los rayados de secciones en perspectiva axonométrica (Fig. 36)

Las superficies producidas por un corte se rayan en cada plano del sistema con líneas de rayado paralelas a las direcciones d_1, d_2 y d_3, respectivamente. Se toma un segmento *s*, cualquiera, sobre cada eje y se unen los puntos *A*, *B* y *C*.

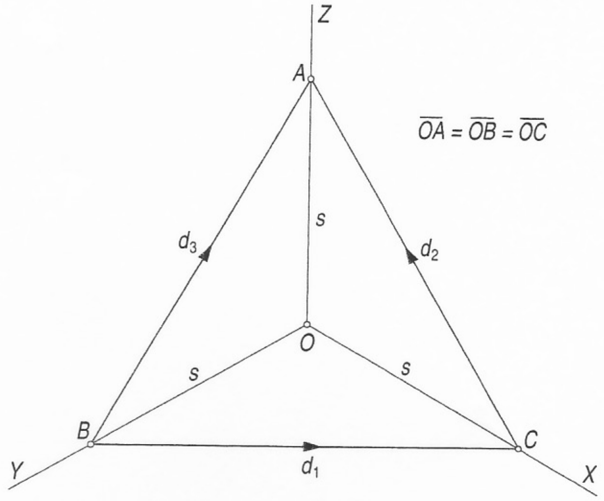


Fig. 36.

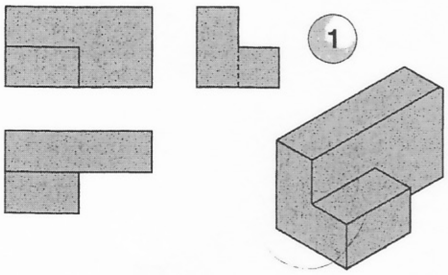
NOTA IMPORTANTE:
Antes de empezar a dibujar la perspectiva de una pieza, deben estudiarse con detenimiento las vistas diédricas, o dibujo de taller, que la definen. Mentalmente se debe descomponer en sólidos geométricos como paralelepípedos, cilindros, prismas, conos, esferas, etc., o partes de ellos, que guardarán en el espacio una posición relativa entre sí, posición que debe conservarse rigurosamente en la perspectiva. Una vez hecho este estudio para comprender la pieza de forma global, puede dibujarse la perspectiva empezando por algún extremo de la pieza o tomando un eje de simetría total de la misma.

ACTIVIDADES

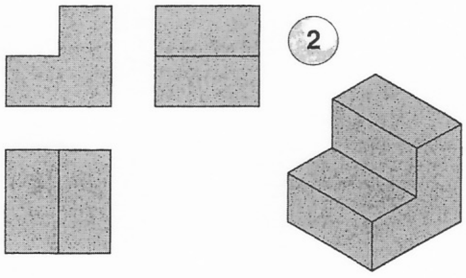
1. Dibujar las proyecciones axonométricas de cuatro puntos situados cada uno de ellos en uno de los triedros situados por debajo del plano *XOY*
2. Dibujar las proyecciones de puntos que estén situados en los diversos cuadrantes de los tres planos de proyección.
3. Determinar las proyecciones de puntos que estén situados en cada uno de los ejes del sistema.
4. Determinar la intersección de dos planos paralelos al eje *X*.
5. Determinar la intersección de un plano oblicuo cualquiera y otro paralelo al plano *YOZ*.
6. Hallar la intersección de un plano oblicuo con una recta paralela al eje *Z*, ó al eje *X* ó al eje *Y*.

En esta actividad resuelta se dan las vistas de una pieza y se visualiza la misma mediante su perspectiva axonométrica isométrica. El lector debe interpretar la pieza en los dos sistemas, identificando la posición de cada una de las caras de la pieza, es decir, fijar si son planos frontales, horizontales, proyectantes, de perfil u oblicuos. Se pueden numerar los vértices de la perspectiva y pasarlos a las proyecciones diédricas.

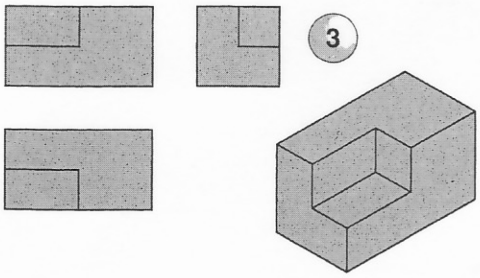
1



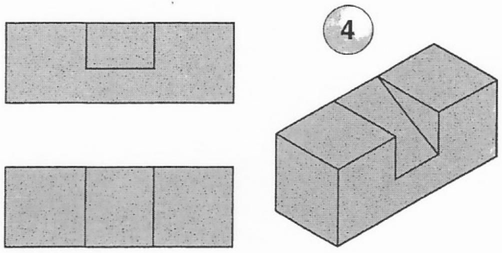
2



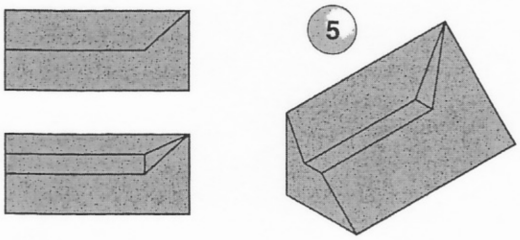
3



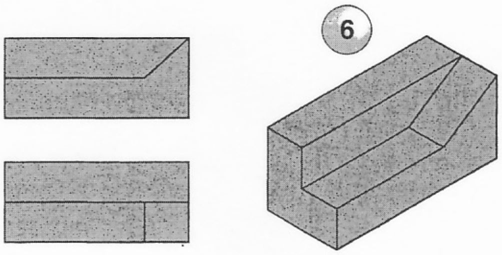
4



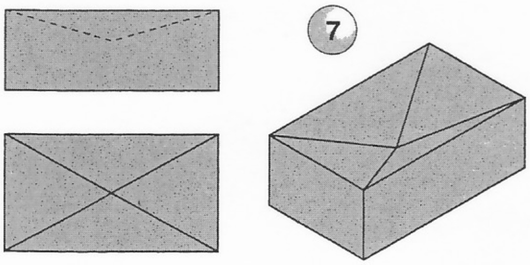
5



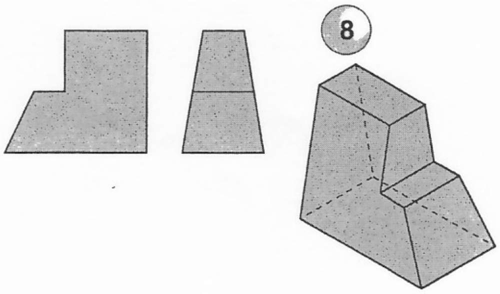
6



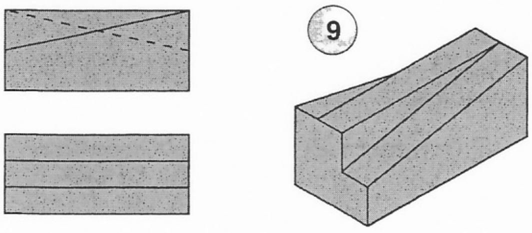
7



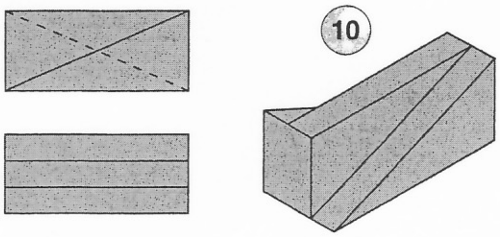
8



9



10



Tenemos cuatro piezas acotadas, dadas por sus proyecciones diédricas, que presentan caras planas y superficies curvas. Se trata de dibujar la perspectiva axonométrica de cada una de ellas Si se considera necesario, hacer algún corte que permita definir o interpretar mejor la pieza.