POLÍGONOS

Redas y puntos notables en el triángulo
Construcción de triángulos
Análisis y construcción de polígonos regulares convexos y es+rel lados

TEMA3

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática los objetivos que se persiguen son, en primer lugar, la construcción de nuevos casos de triángulos y cuadriláteros, aplicando lo estudiado en el curso anterior, con las nuevas propiedades expuestas en este tema y finalmente la construcción de polígonos regulares.

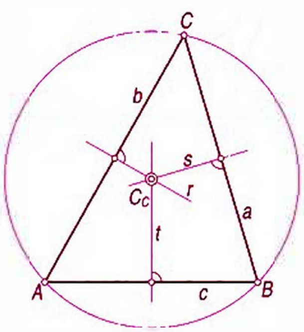
1. Rectas y puntos notables de un triángulo

- **Mediatriz de un lado:** Es la recta perpendicular al lado en su punto medio (Fig. 1).

  El punto de mtersecc1ón de las tres mediatnces se llama **circuncentro.** En la figura las tres med1atnces r. s y t se cortan en el cncuncentro C_o. Este punto es el centro de la circunferencia cncunscnta al triángulo

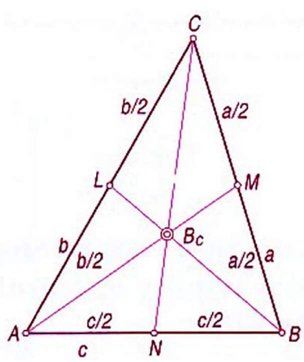
- **Mediana de un lado:** Es la recta que une un vértice con la mitad del lado opuesto (Fig. 2).

  El punto de mtersecc1ón de las tres medianas se llama **baricentro** y es el centro de gravedad del tnángulo. En la figura, las tres medianas, $\overline{AM}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CN}$ se cortan en Be, sevenf1ca queBJI1 = 1!3$\overline{AM}$y lo mismo en las otras dos medianas



Ce= circuncentro

Fig. 1.

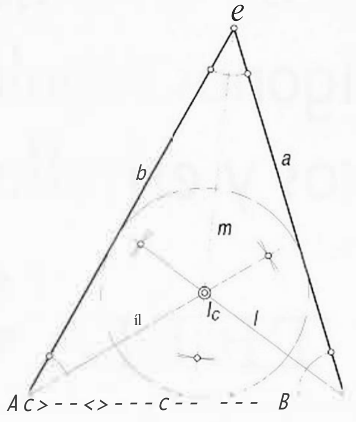


Be= baricentro

Fig. 2.

- Bisectriz de un ángulo: Se sabe que es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales (Fig. 3).

El punto de mtersecc1ón de las tres bi.sectnces *l*, *m* y *n* se llama **incentro,** Je. Este punto eqmd1sta de los tres lados del triángulo y por ello es el centro de la circunferencia mscnta en el tnángulo.

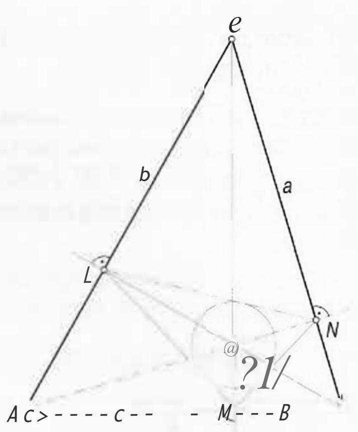


Je= incentro

Fig. 3.

- **Altura de un triángulo:** Es la recta perpendicular trazada por un vértice al lado opuesto (Fig. 4).

Las tres alturas $\overline{AN}$, $\overline{EL}$ y $\overline{CM}$ se cortan en un punto llamado **ortocentro,** Oc. Uniendo los puntosL, M y N se obtiene un triángulo llamado **"órtico"** del anterior y Oc es el centro de la circunferencia mscnta en este tnángulo.



Oc= ortocentro

Fig. 4.

2. Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (Fig. 5)

Este problema ya se ha resuelto en el Tema 1 por medio de un arco capaz. Lo resolvemos ahora por otro procedimiento.

Los datos son los lados *a* y *e* y el ángulo *é* opuesto al lado *e*. En la figura superior se sitúa el lado $a = \overline{CB}$ y en el vértice C se construye el ángulo é, prolongando el lado que va a contener el ladob, con centro en el vértice *B*, se traza el arco de radio *e*, el cual corta en *A* y *A'* al lado obllcuo del ángulo C. El problema tiene dos soluciones, que son los tnángulosABC y*A'BC*.

En la figura mferior se ve que si el lado *e* es menor, tal como *e'*, el problema no tiene más que una solución. Si su valor es *e"*, el problema no tendrá solución

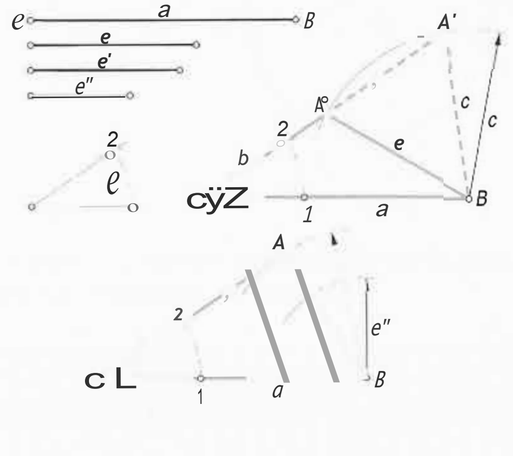


Fig. 5.

3. Construcción de un triángulo conociendo m_a, h_a y b_a mediana, altura y bisectriz de un lado *a* (Fig. 6)

Se construye el tnángulo rectángulo ARO con h. y mª y con centro en A y radio la bisectriz b" se corta en M al lado RO; se prolonga la bisectrizb, hasta que corte enS a la perpendicular por O a RO; la mediatnz del segmento $\overline{AS}$ corta en *Na* la perpendicular antenor. El puntoN es el centro de la circunferencia circunscrita al tnángulo pedidoABC.

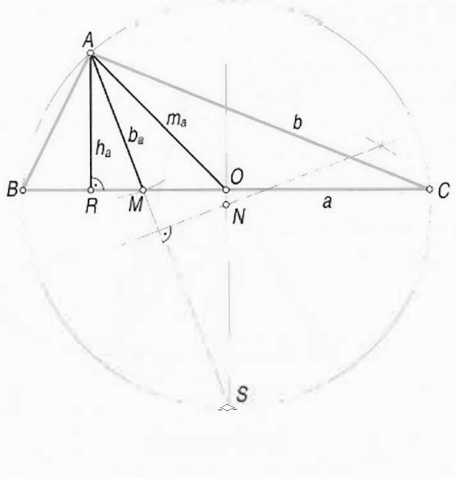


Fig. 6.

4. Construcción de un triángulo rectángulo en A, conociendo la hipotenusa, *a*, y la diferencia de los catetos *b-c* (Fig. 7)

Supuesto construido el tuánguloB$_1$Ap$_1$· se lleva c$_1$ sobre b$_1$ y se une D$_1$ con B$_1$. vemos así que el ángulo en B$_1$ es de 45°. Según esto, ya con los datos que nos dan. se toma el segmento $\overline{b\text{-}c}$ y a parttr de D se construye el ángulo de 45°. con centro en *C* y radio a se cona en *B* al lado del ángulo constnndo. Por B se traza la perpendicular al lado b y queda completado el tnángulo

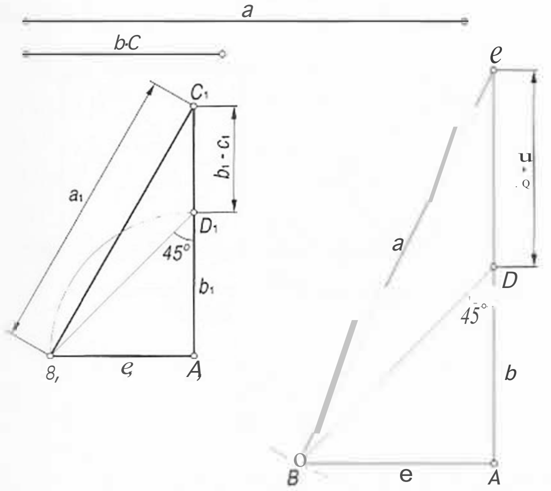


Fig. 7.

5. Construcción de un triángulo rectángulo en A, conociendo la hipotenusa *a* y la suma de los catetos *b+e* (Fig. 8)

En la parte supenor 1zqu1erda de la figura se supone resuelto el problema Se lleva e, a continuación deb1 y la recta *B*D$_1$ forma 45° con la prolongación de *b*$_1$. Según esto, ya con los datos del problema, se sitúa el segmento $\overline{b+e}$, se construye en D el ángulo de 45° y desde C$_2$ se corta con radio a al lado del ángulo de 45º, recta *DH*; desde los puntos B y B$_2$ se trazan las perpendiculares al lado b, obtemendo dos soluciones iguales.

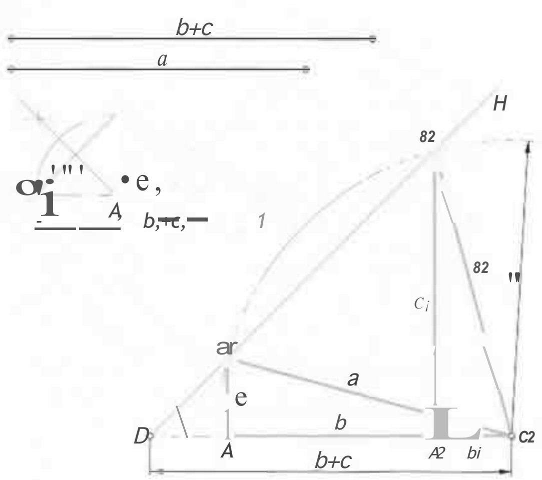


Fig. 8.

6. Construcción de un triángulo rectángulo en A, conociendo un cateto e y la suma de la hipotenusa y el otro cateto *a+b* (Fig. 9)

En la parte supenor de la figura se ha supuesto resuelto el problema; vemos que la med1atriz deB$_1$N pasa por C$_1$ y éste unido aB$_1$, nos dael triángulo Según esto, sobre los lados de un ángulo recto se toman los segmentos e y $\overline{a+b}$. siendo los extremos B y N; la med1atnz de $\overline{BN}$ nos da el punto *C* tercer vértice del triángulo pedido.

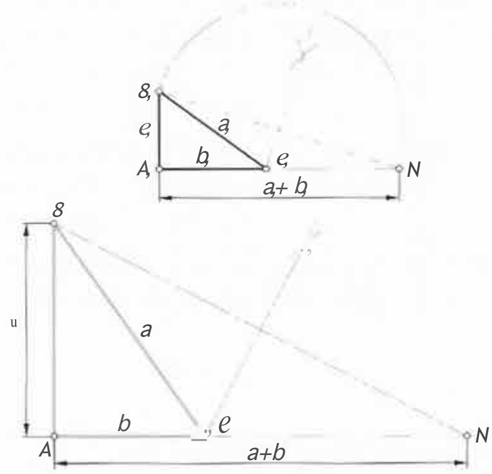


Fig. 9.

7. Construcción de un triángulo rectángulo en *A*, conociendo *e* y *a-b* (Fig. 10)

En la flgura supenor se supone constnndo el tnángulo C$_1$A$_1$B$_1$; vemos queA$_1$N$_1$ valea$_1$-b$_1$ y que la med1atnz del segmentoB$_1$N$_1$ pasa por el tercer vértice C$_1$. Según esto, en la figura infenor, se toma el segmento dado, $\overline{a\text{-}b}$, y sobre la perpendicular a él por A se lleva el cateto e = $\overline{AB}$. La med1atnz del segmento $\overline{NB}$ determina en la prolongación de *NA* el vértice *C*. El tnángulo pedido es BAC

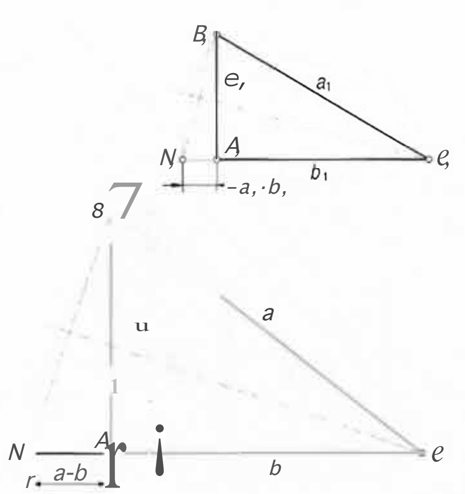


Fig. 10.

8. Construcción de un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), conociendo el ángulo A y el segmento $\overline{a+h}_a$ (Fig. 11)

Se construye el tnánguloABp, aux1ltar que tenga el ángulo A dado: se toma $\overline{AM_1} = \overline{N_1A} + \overline{B_1C}$, y se uneB$_1$ con M$_1$; a commuac1ón, a partn de A y hastaM se lleva el segmento dado a + h ; fmalmente, por M se traza la paralela a B$_1$M$_1$, obteniendo el vértice B del tnángulo

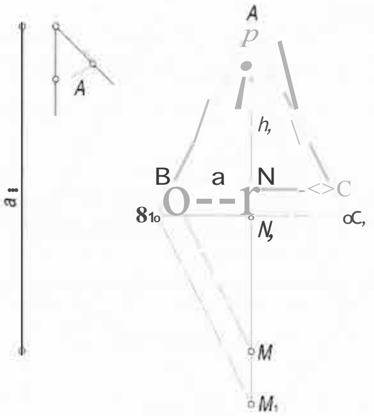


Fig. 11.

9. Construcción de un cuadrado conociendo la suma de la diagonal más el lado

Primer procedimiento (Fig. 12):

Este problema se resuelve por seme¡anza con otro cuadrado auxiliar Se construye un cuadrado cualquiera de lado $\overline{L_1} = \overline{AB}$ y sobre la diagonal se toma el segmento $\overline{D' + L_1}$ Se une el punto N con B y se toma sobre la citada diagonal el segmento conocido $\overline{D + L}$ a partir del vértice A, por el extremo M se traza la paralela a NE. obteniendo el punto C en AB El segmento $\overline{AC}$ es el lado L del cuadrado pedido que tiene $\overline{AM} = \overline{D + L}$

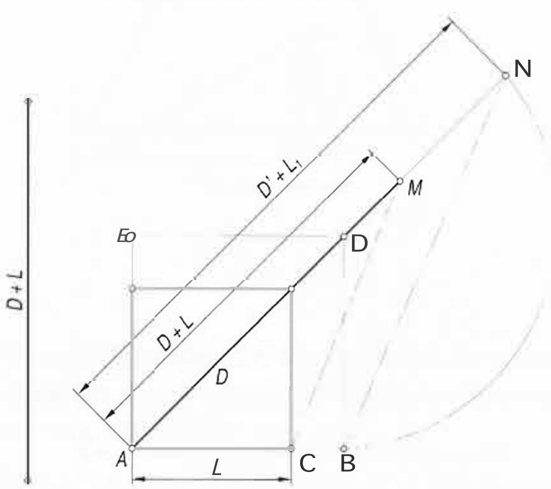


Fig. 12.

Segundo procedimiento (Fig. 13):

Se sitúa el dato $D + L$ y en su extremo B se traza la perpendicular a él. en el otro extremo C se construye un ángulo de 22° 30' (cuarta parte de 90°) hasta que corte en A a la perpendicular anterior. El segmento AB es el lado del cuadrado pedido.

El lector puede deducu, como e1erc1c1O, la demostrac1ón de este procedimiento.

De forma similar se construye un cuadrado conoc1endo la d1ferenc1a de la diagonal y el lado.

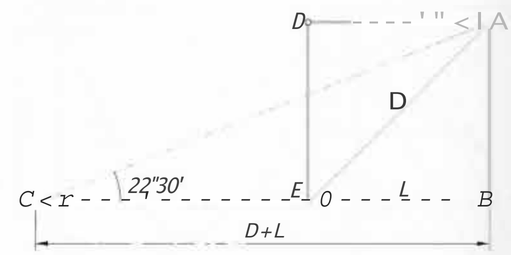


Fig. 13.

10. Construcción de un cuadrado cuya superficie sea la mitad de la suma de otros tres cuadrados (Fig. 14)

Los lados de los cuadrados son L_1, L_2 y L_3. La fórmula que nos da el lado del cuadrado solución es:

$$2L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

En la hgura está construida esta fórmula y se obtiene el lado L del cuadrado cuya superhc1e es la mitad de la suma de las superf1c1es de los cuadrados cuyos lados son L_1, L_2 y L_3.

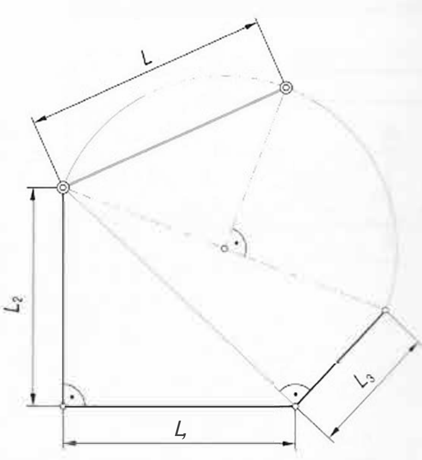


Fig. 14.

11. Polí$_g$onos regulares estrellados

Son polígonos cóncavos que tienen forma de estrella y Se obtienen de unH de 2 en 2 de 3 en 3 etc . los vértices de: polígono regular convexo.

::=nla Fig. 15. caso de cmco d1v1s10nes, s1 se unen de d:s en dos, se obtiene el pentágono esLrellado y se han dacto dos vueltas a la circunferencia para cerrar el poJgono

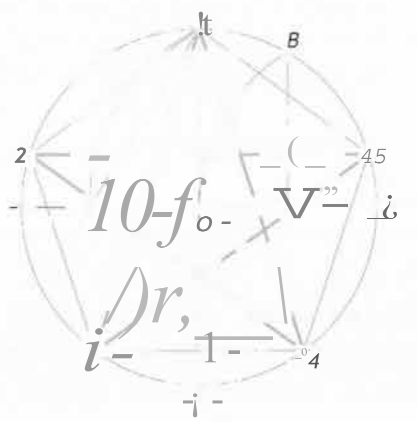


Fig. 15.

Género (g)' es el número de lados o de cuerdas que O!"illan el polígono estrellado

Especie (e) es el número de vueltas que hay que dar para cerrar el polígono

Paso *{p):* es el número de d1v1s1ones que abarca un lado.

Siendo n el número de d1vis1ones de la cncunferencia, se cumple·

$g \cdot p = n \cdot e$ en donde $g = n \; e \; 1$

el número de lados o género g ha de ser un número entero, por lo que e ha de ser múltiplo de p.

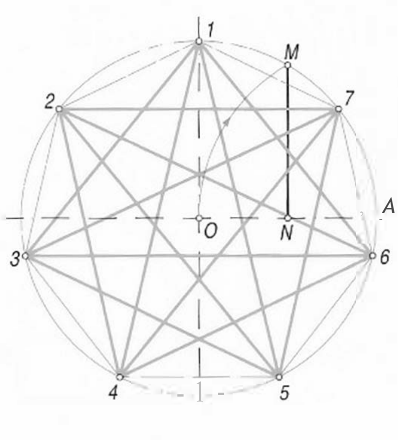


Fig. 16.

En general. y para resumH, duernos que partiendo de n d1v1s1ones, se pueden constnur tantos polígonos estrellados como números enteros hay, menores que su mitad (n/2) y pnmos conn

Así, por ejemplo, con siete d1v1s10nes (heptágono regular convexo), la mitad es 3,5 y los números enteros primos con 7 y menores de 3,5 son el 2 y 3. Según esLo, el heptágono tiene dos polígonos estrellados. que se obtienen umendo los vérLices de 2 en 2 y de 3 en 3 (Fig. 16)

12. Dado el lado, construcción del octó$_g$ono, eneá$_g$ono, decá$_g$ono y dodecá$_g$ono regular convexo (Figs. 17, 18, 19 y 20)

En estas figuras se md1ca un segundo procedurnento para construir estos polígonos. El lector puede deducu con facilidad la construcción.

Fig. 17: El octógono estará mscnto en la cucunferenc1a de centro 0_1 y radw $\overline{0_1A} = \overline{0_1B}$

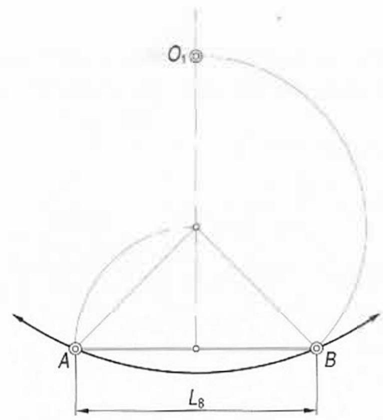


Fig. 17.

F1g. 18 El eneágono estará mscnto en la circunferencia de centro O_2 y radio $\overline{O} = \overline{O_iB}$

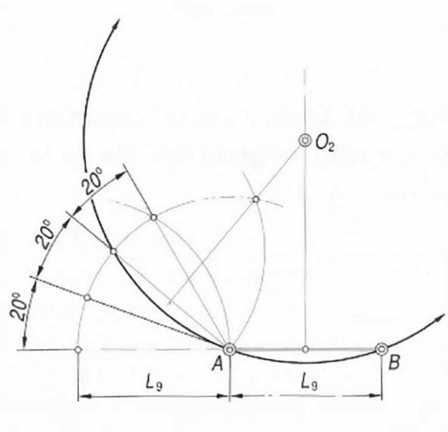


Fig. 18.

Fig. 19: El decágono estará inscnto en la c1rcunferenc1a de centro 0_3 y radio $\overline{Ot4} = \overline{O_3B}$

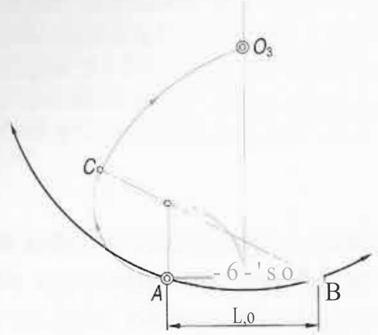


Fig. 19.

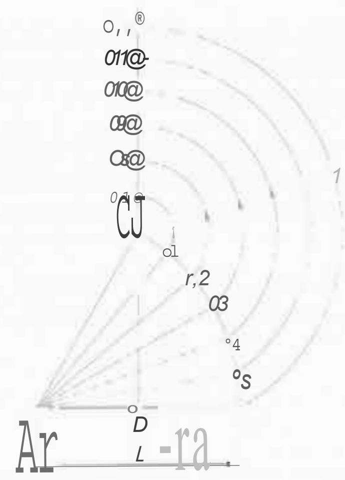


Fig. 21.

Fig. 20 El dodecágono estará inscrito en la circunferencia de centro 0_4 y radio $\overline{0_4A} = \overline{0_4B}$.

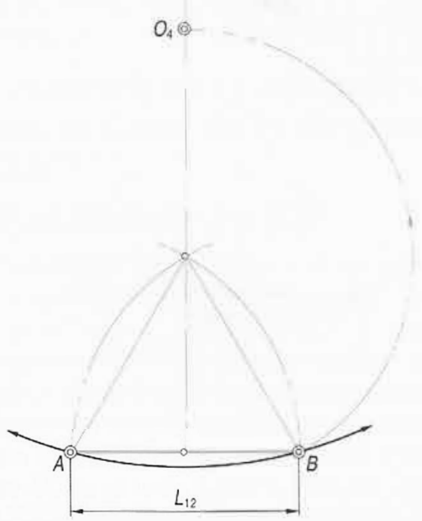


Fig. 20.

14. Dado el lado, construcción de los polígonos regulares convexos de trece a veinticuatro lados (Fig. 22)

Resuelto el problema para los polígonos de 6 a 12 lados. el presente se reduce a repetn la operación. Para el de 13 lados, se hace centro en *1*·y con rad10 *1'A* se traza el arco que corta en 13' a la med1atnz de $\overline{AB}$. El punto 13' es el centro de la cncunterenc1a cncunscrita al polígono de 13 lados y de radio $\overline{13'A}$ Para el polígono de 14 lados. centro en2' y radio2'A hasta que el arco corte en el punto *14'* a la med1atnz.

Fig. 22.

13. Dado el lado, construcción de los polígonos regulares de seis a doce lados (Fig. 21)

Es un procedimiento empínco. Sea $\overline{AB} = L$ el lado conocido. Se traza la med1atnz de$\overline{AB}$ycon centro en A, el arco $\overset{\frown}{BC}$. Se d1v1de este arco en seis partes iguales y con centro en C y rad10s $\overline{C1}$, $\overline{C2}$, $\overline{C3}$, etc , se trazan los arcos de la figura hasta que corten a la med1atnz en 0_7, 0_8, ..• 0_{12}, estos puntos son los centros de las circunferencias circunscritas a los polígonos de 7, 8 . 12 lados iguales a$\overline{AB}$

1S. División de un arco de circunferencia en un número de partes iguales (Fig. 23)

Sea el arco $\widehat{AB}$ el que hay que d1vid1r en 6 panes ..iales. Se toma una cuerda $\overline{AE}$ que aproximadamente sea una sexta parte del arco, observando que sobra el arco $\widehat{BC}$. Hacemos lo mismo para otra cuerda $\overline{AJ}$, menor que la antenor, y en este caso hay un defecto de arco $\widehat{BD}$. S::ibre una recta se toman las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{AI}$ y sobre sus extremos y en dos perpendiculares llevamos $\overline{EH}$ = $\overline{BC}$ y $\overline{IF}$ = $\overline{BD}$. Uniendo los puntos H y F se obtiene el punto N El segmento $\overline{AN}$ es exactamente la cuerda que permite d1v1d1r el arco en seis partes iguales.

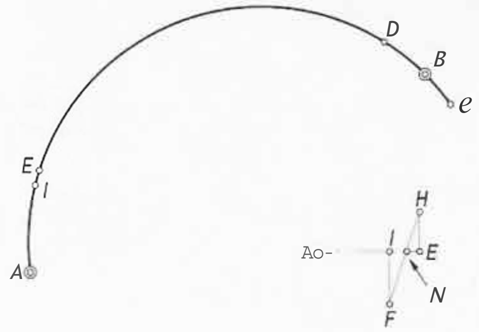


Fig. 23.

ACTIVIDADES

1. Dibujar el triángulo isósceles del que se conoce el radio de la c1Icunferenc1a circunscrita de 32 mm y el lado igual de 60 mm

2. DibuJar el triángulo conociendo los siguientes datos $ladoAB$ = 55 mm; BcA = 30 mm; $Bc8$ = 35 mm (Be es el bancentro)

3. Dibu1ar el tnángulo rectángulo conocida la hipotenusa de 60 mm y la altura sobre ésta de 25 mm.

4. Construir el triángulo de lados 65, 55 y 80 mm Representar en él los siguientes puntos: ciicuncentro, bancentro. mcentro y ortocentro.

5. Construir el cuadrado del que se conoce la d1ferenc1a de la diagonal menos el lado. igual a 25 mm

6. Construir el cuadrado eqwvalente a un pentágono de lado30mm

7. D1bu1ar los polígonos regulares estrellados de un heptágono inscrito en una circunferencia de 50 mm de radio.

8. Dibujar un trinquete completo de quince dientes, como el representado en la figura, con las medidas que se mdican (F1g. 24).

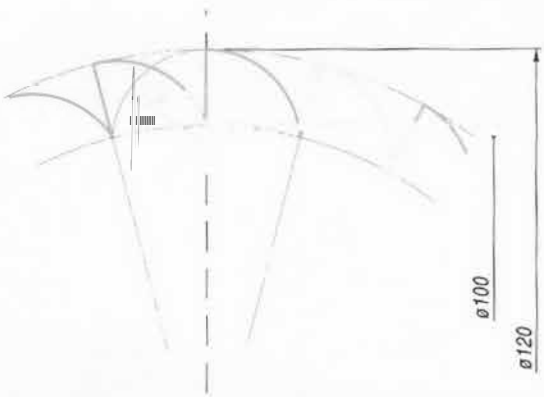


Fig. 24.